N° d'ordre : 395 Année 1970

THÈSE

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

pour l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Jean-Louis ABATUT

Ingénieur ENSEEHT
Docteur en Electronique

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DE SYSTÈMES A DONNÉES ÉCHANTILLONNÉES A L'AIDE DES RÉCURRENCES ASSOCIÉES

Soutenue le 25 Mai 1970 devant la Commission d'Examen :

MM. J. LAGASSE — *Président*

I. GUMOWSKI
P. VIDAL
Y. SEVELY
C. MIRA
— *Examinateurs*

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536510_0004

N° d'ordre : 395

Année 1970

THÈSE

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

pour l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Jean-Louis ABATUT

Ingénieur E N S E E H T
Docteur en Electronique

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DE SYSTÈMES A DONNÉES ÉCHANTILLONNÉES A L'AIDE DES RÉCURRENCES ASSOCIÉES

Soutenue le 25 Mai 1970 devant la Commission d'Examen :

MM. J. LAGASSE — *Président*

I. GUMOWSKI
P. VIDAL
Y. SEVELY
C. MIRA — *Examinateurs*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE TOULOUSE — FACULTE DES SCIENCES

PERSONNEL ADMINISTRATION

M. MATHIS	Président du Conseil Transitoire de Gestion
M. AGID	Assesseur
M. LELUBRE	Assesseur

HONORARIAT

M. CAPDECOMME	Doyen honoraire, Recteur honoraire
M. DELTHEIL	Recteur honoraire, Doyen honoraire, Professeur honoraire
M. DUPOUY	Doyen honoraire, Membre de l'Institut, Directeur Général honoraire du C. N. R. S.
M. DURAND	Doyen honoraire
M. FOUCHE	Professeur honoraire
M. GAUSSENS	Professeur honorare, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES	Professeur honoraire
M. MIGNONAC	Professeur honoraire
M. MORQUER	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. VANDEL	Professeur honoraire, Membre de l'Institut
M. TEISSIE-SOLIER	Professeur honoraire

PROFESSEURS

M. ESCANDE	Mecanique des Fluides, Membre de l'Institut
M. DUPOUY	Physique, Membre de l'Institut
M. CASTERAS	Géologie, Correspondant de l'Institut
M. BEDOS	Chimie
M. CAPDECOMME	Minéralogie
M. DUPIN	Radioélectricité
M. NOUVEL	Biologie Générale
M. GALLAIS	Chimie, Correspondant de l'Institut

M. DURAND	Physique
M. FERT	Physique
M. DIEHL	Agronomie
M. LESBRE	Chimie Organique
M. BRUNEL	Physiologie végétale
M. HURON	Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS	Pédologie
M. TRICHE	Chimie Analytique et Spectrographie
M. LEDOUX	Zoologie Appliquée
M. RIVALS	Agriculture
M. PERRIER	Physique
M. MATHIS	Chimie
M. ORLIAC	Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE	Physique
M. ANGELIER	Zoologie
Melle de FERRE	Botanique
M. FARRAN	Minéralogie et Géotechnique
M. LAUDET	Physique théorique et Calcul Numérique
M. SERFATY	Biologie Animale
M. NOUGARO	Hydraulique générale et appliquée
M. LAGASSE	Electrotechnique
M. GARDY	Génie chimique
M. BLANC	Physique Nucléaire
M. BIREBENT	Electronique Appliquée
M. VOIGT	Chimie Minérale
M. LEREDDE	Botanique
M. LELUBRE	Géologie
M. TROCHAIN	Botanique
M. MASDUPUY	Chimie
M. LALAGUE	Mathématiques Générales
M. DESSENS	Physique du Globe, Correspondant de l'Institut
M. BOUIGUE	Astronomie

M. COUCHET	Physique
M. LEJEUNE	Chimie
M. LASCOMBES	Botanique
M. ASSELINEAU	Chimie Biologique
M. MAURET	Chimie systématique
M. AGID	Physiologie
M. MONTANT	Cryptogamie
M. GAUTIER	Physique
M. CRUMEYROLLE	Mathématiques
M. GOURINARD	Géologie
M. PULOU	Minéralogie
M. CAMBOU	Physique Spatiale
M. MIQUEL	Chimie
M. LACOSTE	Electrotechnique
M. THIBAULT	Mécanique Rationnelle et Appliquée
M. MONTEL	Chimie Physique et Electrochimie
M. MASCART	Mathématiques
M. MEDIONI	Psychophysiologie
M. THIRRIOT	Hydrodynamique E.N.S.E.I.H.T.
M. BRENON	Géologie
M. LAFON	Calcul différentiel et intégral
M. RAYNAUD P.	Physiologie animale
M. ZALTA	Chimie biologique
M. SEVELY	Electrotechnique
M. POMMIEZ	Mathématiques
M. REY	Biologie végétale
M. COULOMB	Physique
M. TRINQUIER	Physique
M. MARONI	Chimie
M. BEETSCHEN	Biologie Générale
M. GRUAT	Mécanique des Fluides (Hydraulique)

PROFESSEURS ASSOCIES

M. MANSOUR

M. SAKUMA

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. HAMANT	Botanique
Mme BRUNEL	Physiologie végétale
Melle BERDUCOU	Physiologie végétale
M. PICCA	Physique
M. MERIC	Mathématiques Appliquées
Mme LECAL	Zoologie
M. BUGAREL	Génie Chimique
M. MIROUSE	Géologie
M. PILOD	Physique
M. LARROQUE	Physique
M. BARRANS	Chimie
Mme LAFON	Mathématiques
Melle LAPEYRE	Mathématiques (Informatique)
M. DAT	Mécanique des Fluides
M. JEANNIN	Chimie Minérale
M. BERTRAND	Chimie
M. SATGE	Chimie Organique
M. DESQ	Mathématiques
M. MAHENC	Chimie
M. LATTES	Chimie
M. ROCARD	Electronique
M. DEGEILH	Physique
M. FALLOT	Biologie végétale (Viticulture et Arboriculture)
M. POLBLANC	Chimie
M. TOUZE	Physiologie végétale
M. FRASNAY	Mathématiques

M. CASSAGNAU	Zoologie
M. GUERIN	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCES

M. BLANCHARD	Mathématiques
M. HOFFMANN	Electronique
M. BITSCH	Zoologie
M. FONTAN	Physique Nucléaire
M. PESCIA	Physique
M. SICARD	Biologie génétique
M. CAUSSINUS	Mathématiques appliquées
M. DE LOTH	Chimie Physique
M. MARTY	Physique industrielle
M. BAUDRAS	Chimie Biologique
M. DURAND Ph	Physique
M. LEFEUVRE	Electronique E.N.S.E.I.H.T.
M. SOUQUET	Géologie
M. SAPORTE	Physique
M. ATTEIA	Mathématiques
M. ENJALBERT	Chimie
M. IMBERT	Psychophysiologie
M. SCHNEIDER	Biologie cellulaire
M. ANGELINO	Génie Chimique
M. DABOSI	E.N.S.C.
M. ETTINGER	Mathématiques
M. CALVET	Mécanique des Fluides (E.N.S.E.I.H.T.)
M. PAGANI	Physique
M. CUPPENS	Mathématiques
M. MATHIEU	Chimie analytique
M. TRANNOY	Physique (E.N.S.E.I.H.T.)
M. CASTAGNETTO	Mathématiques (E.N.S.E.I.H.T.)

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

M. PUN
M. PARKS

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. BEAUFILS	Informatique
M. DARROZES	Mécanique
M. OLIVIER	Mathématiques
Melle BARBANCE	Mathématiques

Personnel de la Faculté affecté à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

PROFESSEURS

M. ROQUES	Chimie Industrielle
M. GRATELOUP	Génie Electrique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. CASSIGNOL	Génie Electrique
M. COLLETTE	Physique
M. MASO	Génie Civil

MAITRES DE CONFERENCES

M. FAGET	Physique
M. TRUCHASSON	Mécanique
M. SCHUTTLER	Physique

M. MIRA	Génie Electrique
M LETURCQ	Génie Electrique
M. SIRIEYS	Génie Civil
M DURAND G.	Chimie
M. CARRARA	Physique

Personnel affecté à l'Institut Universitaire de Technologie de Toulouse

MAITRES DE CONFERENCES

M. MARTIN	Génie Electrique
M. THENOZ	Minéralogie
M PERENNOU	Informatique

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. REY	Génie Electrique

ADMINISTRATION

M. PRINEAU	Conseiller Administratif des Services Universitaires

A ma femme

A nos enfants

A nos parents

avec toute mon affection.

AVANT - PROPOS

Voilà maintenant sept années que nous faisons partie de l'Equipe menée par Monsieur le Professeur LAGASSE. A cette étape de notre carrière nous tenons à lui exprimer notre vive gratitude pour nous avoir accepté au sein du Laboratoire de Génie Electrique de l'Université de Toulouse, puis du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales du C.N.R.S.
Son exemple est, et a toujours été un guide précieux dans la voie que nous avons choisie. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre reconnaissance et de notre respectueux attachement.

Monsieur le Professeur SEVELY a toujours fait preuve d'une grande sollicitude à notre égard. Ses enseignements, la confiance qu'il nous a accordée, ses qualités humaines nous ont apporté une aide précieuse dans notre formation. Il nous est agréable de lui témoigner ici toute notre reconnaissance.

Monsieur le Professeur MIRA, Maître de Conférences à la Faculté, en assurant la direction de notre travail de recherche, nous a beaucoup aidé pour le mener à bien. Ses conseils et sa persévérance ont toujours été pour nous un précieux encouragement. Nous tenons à lui exprimer ici nos plus vifs remerciements et toute notre reconnaissance.

Nous sommes particulièrement sensible à l'honneur que nous fait Monsieur le Professeur GUMOWSKI en acceptant de siéger à notre Jury. Par ses enseignements, lorsqu'il était Professeur Associé à la Faculté des Sciences de Toulouse, il nous a permis de bénéficier de ses grandes compétences. Qu'il veuille bien accepter nos vifs remerciements.

Nous apprécions l'amabilité de Monsieur le Professeur VIDAL d'avoir bien voulu accepter de siéger à notre Jury. L'étendue de ses connaissances dans le domaine abordé par notre travail le désignait tout particulièrement pour cette tâche. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude ainsi que de notre sincère amitié.

Nous tenons à souligner ici l'aide apportée au Laboratoire par la Direction des Recherches et Moyens d'Essais du Ministère des Armées par l'intermédiaire de deux contrats de recherches, l'un portant sur l'identification des systèmes non linéaires et la sensibilité par discrétisation, l'autre, qui concerne plus particulièrement notre travail, sur les récurrences et leurs applications. Cet avant-propos nous fournit l'occasion de remercier cet organisme.

Nous désirons aussi remercier chaleureusement tous ceux qui par leur amicale collaboration ont aidé à la progression de nos recherches. En particulier nous tenons à rendre hommage à l'esprit d'équipe qui a toujours régné dans le groupe de recherches "Analyse et Conception de Systèmes de Commande" du L.A.A.S.

Enfin nous devons mentionner le concours précieux que le Service de Documentation du L.A.A.S. a apporté à la réalisation matérielle de ce mémoire, qu'il s'agisse des soins apportés à la dactylographie, à la reproduction des figures, ou à l'impression de cet ouvrage.

INTRODUCTION

Le travail présenté dans ce mémoire s'insère dans le cadre des recherches menées par l'equipe "Mecanique non linéaire" du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales du C.N.R.S. Ces recherches concernent essentiellement l'analyse de systèmes discrets , systèmes dont le comportement peut être décrit par des équations aux récurrences de la forme

$$\underline{X}_{n+1} = \underline{F}(\underline{X}_n, n)$$

où $\underline{X}$ est un vecteur à s dimensions et n un entier positif.

De telles recherches sont justifiées par l'importance croissante des systèmes de commande automatique à information discrète. L'introduction, notamment, des calculateurs numériques dans la commande des processus, conduit sur le plan théorique à l'étude de modèles mathématiques discrets. De plus, et à l'inverse des équations différentielles ordinaires dont les travaux remontent à la fin du dix neuvième siècle, relativement peu d'études ont été menées dans le domaine des récurrences.

Le but des recherches entreprises au sein de l'équipe dont nous faisons partie est de développer dans la mesure du possible certains résultats déjà obtenus sur les récurrences de les compléter par une étude systématique des propriétés de leurs solutions, enfin d'appliquer ces résultats à l'étude de problèmes tels que

- l'influence de certaines non linéarités sur le comportement de systèmes à données échantillonnées ;
- les conséquences d'un type d'échantillonnage particulier (durée non nulle, pas d'échantillonnage lié à l'état du système...) sur le fonctionnement d'un système de commande;
- l'analyse de certains systèmes discontinus tels que les redresseurs contrôlés de courant alternatif avec commande en boucle fermée ;
- la discrétisation des équations différentielles ordinaires en vue de leur résolution sur calculateur numérique ;
- certains problèmes de programmation non linéaire.

Le point de départ de ces recherches a été l'analyse des propriétés des récurrences autonomes à variables réelles du deuxième ordre de la forme :

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

Les études sur ce type de récurrence concernent :

- l'analyse des états stationnaires (points doubles, cycles, zones de PULKIN) de telles équations, c'est-à-dire leur nature en précisant notamment les conditions de stabilité locale et globale. Ce dernier point demande en particulier la détermination du domaine complet (D, d'influence d'un état stationnaire stable dans le plan de phase discret. Citons en particulier la mise au point de programmes de calcul permettant de déterminer la frontière (F) d'un tel domaine d'influence.

Il a été montré, de plus, que dans certaines conditions le domaine de stabilité (D) peut être constitué par un ensemble de régions sans connexion entre elles, l'une des régions contenant l'état stationnaire.

-l'étude des cas critiques au sens de Liapunov qui apparaissent lorsqu'une racine de l'équation caractéristique (multiplicateur) a son module égal à l'unité, l'autre ayant son module inférieur à l'unité. Deux cas sont à envisager selon que les multiplicateurs sont réels ($S_1 = \pm 1$, $|S_2| < 1$) ou complexes ($S_{1,2} = e^{\mp j\varphi}$)

L'analyse de la stabilité de la singularité, dans le premier cas, a été complétée d'une étude de l'allure des trajectoires discrètes au voisinage du point double.

Dans le deuxième cas, multiplicateurs complexes conjugués, il a été montré, qu'en dehors de "cas d'exception" obtenus pour φ commensurable avec 2π, on avait affaire à un foyer possédant une certaine multiplicité. Les conditions de stabilité d'une telle singularité ont été obtenues par deux voies différentes (fonction de Liapunov et substitutions de CIGALA). En ce qui concerne les cas d'exception, que nous envisageons dans notre mémoire, on montre que certains correspondent à des points hyperboliques, points dont l'étude permet la mise en évidence d'un phénomène de résonance non linéaire paramétrique pour une récurrence d'ordre deux.

- l'étude des changements de comportement qualitatif de la solution d'une récurrence, lorsque sous l'effet d'une variation de paramètre, il se produit la traversée d'un cas critique. Lors de la traversée d'un cas critique avec multiplicateurs réels les travaux ont porté sur la détermination des singularités qui peuvent apparaître (points doubles ou cycles).

La traversée d'un cas critique, avec multiplicateurs complexes donne naissance à

une trajectoire discrète fermée, attractive ou répulsive suivant les cas, entourant la singularité. Cette propriété permet d'expliquer l'apparition d'oscillations presque périodiques.

Ces considérations nous permettent de situer le travail présenté dans ce mémoire :

Le but essentiel de notre travail est de montrer que certains résultats théoriques sur les propriétés des récurrences ont un sens physique, en particulier que certaines propriétés des solutions des récurrences permettent d'expliquer les phénomènes complexes rencontrés dans les systèmes décrits par de telles équations. A partir de ces résultats nous avons consacré nos efforts à la compréhension de certains problèmes particuliers tels que :

- les performances d'un système échantillonné lorsque la durée d'échantillonnage n'est pas nulle ;
- l'analyse des cas critiques et de certains cas d'exception pour un système échantillonné du deuxième ordre avec échantillonneur idéal périodique et non linéarité essentielle ;
- l'étude d'oscillations complexes (presque périodiques, basse fréquence) qui peuvent apparaître dans un tel système.

Ces trois points constituent les trois chapitres de notre mémoire :

(A) - Nous avons tout d'abord envisagé le cas d'un système échantillonné linéaire dans lequel l'échantillonneur a une durée de fermeture non nulle (échantillonnage non instantané). De nombreux articles - nous citons les principaux dans le texte de notre mémoire - préconisent différentes méthodes d'analyse de tels systèmes. A partir d'une formulation à l'aide d'équations aux récurrences, et pour un système possédant une partie continue du deuxième ordre, nous avons pu mettre en évidence les conditions particulières de stabilité en fonction des valeurs de h la durée d'échantillonnage, T la période d'échantillonnage et K le gain de la partie continue. Comme conséquences de ces résultats nous envisageons essentiellement les problèmes de précision. En particulier nous montrons qu'il est possible de choisir des valeurs du gain K améliorant les performances transitoires et permanentes du système, ce qui n'apparaît pas lorsqu'on fait, comme le suggèrent certains auteurs, une analyse approchée.

(B)- Dans le cas d'un système échantillonné non linéaire, avec échantillonnage idéal et périodique, à la suite de travaux déjà menés par l'équipe de "Mécanique non

linéaire" nous avons étudié certains cas critiques de stabilité qui permettent la mise en évidence d'un phénomène de résonance paramétrique non linéaire pour un système échantillonné d'ordre 2 .

comme l'a montré LATTES [II-2], il est possible moyennant certaines hypothèses d'écrire la récurrence (1) sous la forme :

$$(2) \qquad \begin{cases} u_{n+1} = S_1 u_n + U(u_n, v_n) \\ v_{n+1} = S_2 v_n + V(u_n, v_n) \end{cases}$$

avec $U(u_n, v_n)$ et $V(u_n, v_n)$ tels que $U(0, 0) = V(0, 0) = 0$ et que leur développement en série autour de l'origine commencent par des termes de degré supérieur à un.
Dans le cas où S_1 et S_2, multiplicateurs de la récurrence définis par (2), sont différents de 1 il est possible de déterminer les conditions de stabilité locale du point singulier $u_n = v_n = 0$ à partir de l'approximation linéaire de (3).
Lorsque l'un des mutliplicateurs, ou les deux, est égal à un en module, on se trouve en présence d'un "cas critique" et pour conclure à la stabilité ou l'instabilité, il faut considérer les fonctions $U(u_n, v_n)$ et $V(u_n, v_n)$.
En présence de deux multiplicateurs complexes conjugués, de module égal à l'unité, $S_{1,2} = e^{\pm j\varphi}$ un cas très particulier se produit lorsque l'argument φ est commensurable avec 2π (cas d'exception). Ce sont ces derniers cas que nous analysons dans notre mémoire en précisant les phénomènes observés à l'aide d'un ensemble classique : un asservissement du deuxième ordre à échantillonnage d'erreur, possédant une non linéarité essentielle.

(C)- Enfin, dans le dernier chapitre, nous nous sommes attachés à l'analyse de certains types d'oscillations qui peuvent apparaître dans un système échantillonné non linéaire : oscillations de basse fréquence et oscillations presque périodiques. La méthode préconisée pour cette étude, très différente des solutions proposées par certains auteurs, est basée sur les résultats concernant l'analyse des cas critiques, en étudiant notamment les changements de comportement qualitatifs des solutions de la récurrence associée au système sous l'influence d'une variation de paramètre.

CHAPITRE 1

Analyse de systèmes linéaires échantillonnés à durée d'échantillonnage non nulle.

I-1 - INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques dans lesquels il existe un échantillonneur assimilable à un interrupteur qui se ferme pendant une durée h avec une période T ont été introduits dans le passé lorsqu'il s'est posé le problème de la transmission d'informations analogiques. En effet pour des raisons d'économie on a cherché à faire transiter par un même canal plusieurs informations quasi-simultanées. Le problème de multiplexage posé peut être résolu de différentes manières et d'ailleurs les techniques de modulation et de codage ayant beaucoup évolué, les méthodes sont nombreuses. Une méthode est le multiplexage temporel dans lequel on affecte à chaque message à transmettre par le même canal un temps h toutes les T secondes. Bien entendu des raisons d'économie incitent à prendre h aussi petit que possible et T le plus grand possible. Cependant nous verrons que ces choix vont à l'encontre des conditions imposées par la stabilité et la précision des systèmes envisagés. Il s'avère donc que le rapport $\frac{h}{T}$ ne peut vraiment être considéré comme infiniment petit et qu'il y a donc lieu d'étudier de tels systèmes sans négliger le durée de fermeture de l'échantillonneur.

Les problèmes posés dans l'exemple ci-dessus sont essentiellement des problèmes de reconstitution d'informations. En effet les lignes de transmissions, étudiées notamment par BENNET [I-1] et DESOER [I-2], composées déléments passifs, ne posent pas de problèmes de stabilité. Ceux-ci peuvent par contre se poser lorsqu'on introduit des éléments actifs (amplificateurs) en vue notamment de réduire les pertes. De tels systèmes actifs ont été étudiés par FARMANFARMA [I-3] dont nous donnons ci-après les méthodes d'analyse qu'il propose.

Dans les problèmes de commande automatique qui se posent actuellement on peut trouver certains exemples dans lesquels il existe un dispositif d'échantillonnage non instantané . Par exemple dans un satellite stabilisé par inertie, les détecteurs de position (pointeurs solaires...) fournissent d'une manière périodique une information limitée en temps, information qui peut être utilisée en vue d'une correction d'attitude. Bien que les méthodes de codage de telles informations donnent lieu actuellement à des systèmes d'échantillonnage à modulation de largeur, on pourrait songer pour ce système à un échantillonnage non instantané tel que nous l'étudions ci-après.

De nombreux auteurs ont proposé différentes méthodes d'analyse pour étudier des systèmes à durée d'échantillonnage non nulle, méthodes qui pour la plupart sont des méthodes de transformation (transformée de Laplace, transformée en z). Nous nous proposons dans ce chapitre, après un exposé succinct de ces différentes méthodes et des résultats

obtenus ou du moins suggérés, d'étudier un système à durée d'échantillonnage non nulle. Pour mener cette étude nous analysons les propriétés du système d'équations aux différences (récurrences) associées au système. Cette technique d'étude, préconisée par KALMAN et BERTRAM [I.4] pour les systèmes de commande automatique échantillonnés dès 1959, nous permettra de mettre en évidence des propriétés importantes sur les conditions de stabilité d'un tel système, propriétés qui facilitent le problème de synthèse.

I-2 - RAPPEL SUR LES METHODES D'ANALYSE DES SYSTEMES A DUREE D'ECHANTILLONNAGE NON NULLE

Pour cet exposé nous faisons ici la distinction entre deux types de méthodes :

- les méthodes approchées dans lesquelles on élabore des hypothèses permettant d'utiliser des méthodes d'analyse connues (transformée en z, approximation du 1er harmonique...)

- les méthodes exactes qui consistent à analyser les équations du système sans aucune approximation, soit à l'aide d'une transformation (transformation de Laplace), soit directement (équations aux récurrences).

I-2-1 - Méthodes approchées [I.5] [I.6]

Ces méthodes consistent essentiellement à rechercher une approximation d'un train d'impulsions de durée h en vue de pouvoir utiliser la transformée de Laplace.

LEE [I.5] considère l'échantillonneur comme un élément non linéaire dont la sortie est approximée à l'aide de la règle de Simpson (figure I-1)

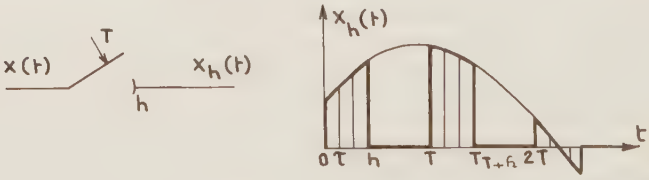


Figure I-1

l'aire d'un échantillon est approximativement :

$$A = h\left[\frac{1}{8} \times (\overline{1}) + \frac{3}{8} \times (kT + \frac{h}{3}) + \frac{3}{8} \times (kT + \frac{2h}{3}) + \frac{1}{8} \times (kT + h)\right]$$

La transformée de Laplace d'une suite périodique de telles impulsions est alors :

$$X^*_h(p) = \left(\frac{a}{8} + \frac{3b}{8} + \frac{3c}{8} + \frac{d}{8}\right) \frac{1 - e^{-hp}}{p}$$

avec

$$\begin{cases} a = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTp} \longrightarrow X^*(p) \\ b = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + \frac{h}{3})\, e^{-kTp} \longrightarrow X^*(p)\, e^{hp/3} \\ c = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + \frac{2h}{3})\, e^{-kTp} \longrightarrow X^*(p)\, e^{2hp/3} \\ d = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + h)\, e^{-kTp} \longrightarrow X^*(p)\, e^{hp} \end{cases}$$

TOU [I.6] a choisit d'assimiler l'échantillon de durée τ à une suite d'impulsions de hauteur constante pendant une durée Δ (figure I-2). Pour cela il décompose la durée τ en N intervalles de durée Δ ce qui donne :

$$X^*_\tau(p) = \sum_{k\Delta=0}^{\tau-\Delta} X^*_{k\Delta}(p, k\Delta)$$

avec

$$X^*_{k\Delta}(p, k\Delta) = \Delta \sum_{n=0}^{\infty} x(nT + K\Delta)\, e^{-(nT + k\Delta)p}$$

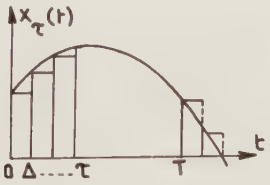


Figure I-2

Dans ces deux types d'approximations on définit donc une transformée de Laplace du signal échantillonné. Il faut remarquer que ces transformées de Laplace contiennent à la fois des termes en e^{TP} et en e^{hP}

L'utilisation de ces méthodes implique un grand volume de calculs et nous ne trouvons pas dans les publications correspondantes d'analyse de cas pratiques, notamment en ce qui concerne les problèmes de stabilité.

Signalons de plus que TOU présente sa méthode comme une méthode exacte d'analyse. Bien que cette affirmation soit contredite par les approximations ci-dessus nous verrons cependant que transposée dans le domaine temporel cette méthode peut donner des résultats satisfaisants pour l'ingénieur.

I-2-2 - Méthodes exactes

a) Méthode de transformation : FARMANFARMA [I.3] utilise directement la transformée de Laplace du signal échantillonné, qu'il appelle transformée en p. Pour éviter toute confusion avec la variable symbolique de Laplace (notée λ dans la littérature anglo-saxone) nous l'appellerons transformée en h.

Considérons un échantillonneur de période T, de durée h (figure I-3)

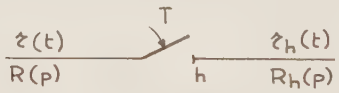


Figure I-3

Nous avons : $r_h(t) = r(t) \cdot u_h(t)$, avec $\begin{cases} u_h(t) = 1 & \text{pour } nT < t < nT + h \\ u_h(t) = 0 & \text{aux autres instants} \end{cases}$

$$\mathcal{L}[r_h(t)] = R_h(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} R(\nu) \frac{1 - e^{-h(p-\nu)}}{(p-\nu)\,[1-e^{-T(p-\nu)}]}\, d\nu$$

En prenant un contour d'intégration entourant les pôles de $R(p)$ il vient :

$$R_h(p) = \sum_{\substack{p_i \\ \text{pôles de} \\ R(p)}} \left[\text{Résidus de } R(\nu) \frac{1 - e^{-h(p-\nu)}}{(p-\nu)\;\; 1-e^{-T(p-\nu)}} \right]_{\nu = p_i}$$

On obtient ainsi une transformée de Laplace qui contient des termes de la forme p, e^{-Tp}, e^{-hp}. L'auteur donne une table des transformées en h pour des fonctions du temps usuelles.

A l'aide d'une telle transformée on peut analyser des systèmes linéaires dans lesquels existent des dispositifs d'échantillonnage non instantané. Cependant il se pose le problème de l'inversion d'une telle transformée. En effet des termes de la forme $\frac{1}{1-e^{-T(p+b)}}$ possèdent un nombre infini de pôles simples, ce qui donne une série infinie pour l'original fonction du temps. Pour résoudre ce problème et obtenir ainsi une fonction sous forme compacte, l'auteur propose une méthode basée sur les propriétés de la transformée en z modifiée. Il établit ainsi une table de transformées inverses qui pour un certain nombre de systèmes permet de revenir dans le domaine temporel.

En ce qui concerne les applications l'auteur signale :

- que cette méthode est utilisable dans tous les cas où une transformée de Laplace contient des termes de la forme $e^{\alpha p}$.
- que pour une entrée finie, dans un système sans bloqueur, la transformée en z donne des résultats faux si le système n'a pas de réponse impulsionnelle continue
- qu'en présence de bloqueur et lorsque h est inférieur au $\frac{1}{10}$ de la constante de temps prépondérante du système, la transformée en z donne des résultats convenables. Nous verrons dans ce qui suit que cette dernière conclusion apparaît erronnée, et l'utilisation de la transformée en z pour des problèmes d'échantillonnage non instantané doit être considérée avec une certaine prudence.

b) Technique d'espace d'état - Equations aux récurrences: KALMAN et BERTRAM [I.4] ont présenté une méthode unifiée d'analyse des systèmes échantillonnés à partir des techniques d'espace d'état, valable en particulier pour les systèmes à échantillonnage non instantané. Pour un tel système, après le choix d'un vecteur d'état pertinent x (t), on définit une équation de transition d'état entre deux instants d'échantillonnage kT et (k+1)T sous forme matricielle

$$\underline{x}\,[(k+1)T] = \Phi(T)\,\underline{x}(kT) + \Omega(T)\,r(kT)$$

où $\underline{x}$ est le vecteur d'état du système, r le signal d'entrée, $\Phi(T)$ la matrice de transition d'état.

Ce type d'équation représente une formulation compacte du système d'équations aux différences (ou récurrences) qui décrit le comportement étudié aux instants d'échantillonnage.

Dans le cas particulier d'un système d'ordre deux une telle formulation aboutit à une récurrence d'ordre deux que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f\,(x_k,\ y_k,\ k) \\ y_{k+1} = f\,(x_k,\ y_k,\ k) \end{cases}$$

x et y étant les deux variables d'état du système. Dans notre travail nous utilisons une formulation de ce type et nous verrons que cette méthode d'analyse dans le domaine temporel basée sur les propriétés des récurrences d'ordre deux, fournit une solution exacte et complète au problème de la stabilité, ainsi que de la précision, pour les systèmes à durée d'échantillonnage non nulle.

Les techniques d'espace d'état peuvent être envisagées comme un moyen de généraliser à des systèmes d'ordre supérieur à deux, les résultats que nous obtenons ci-après.

I-3 - ANALYSE A L'AIDE DES RECURRENCES ASSOCIEES D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE A DUREE D'ECHANTILLONNAGE NON NULLE

Considérons le système de la figure I-4 dans lequel :

$G_{(p)}$ représente la fonction de transfert d'un système du 2è ordre

$B_{(p)}$ un filtre permettant de reconstituer un signal continu à partir de la série d'impulsions de durée h, de période T, fournie par l'échantillonneur.

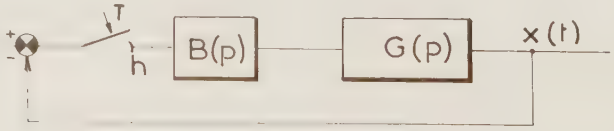


Figure I-4

Le but de cette analyse est de déterminer l'influence de la durée de fermeture h de l'échantillonneur, de la période T d'échantillonnage, ainsi que des paramètres de la partie linéaire, sur les conditions de stabilité de ce système. La détermination de ces conditions de stabilité est effectuée à partir des équations du système autonome

Les variables d'état choisies pour cette étude sont :

la position x(t) de la sortie

la vitesse $y(t) = \frac{dx}{dt}$ de cette sortie.

En intégrant l'équation différentielle G(p) entre deux instants d'échantillonnage nT et (n+1)T (n = 0, 1, 2, ...) nous obtenons un système d'équations aux récurrences de la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} = a(\gamma, T, p_i) \cdot x_n + b(\gamma, T, p_i) \cdot y_n \\ y_{n+1} = c(\gamma, T, p_i) \cdot x_n + d(\gamma, T, p_i) \cdot y_n \end{cases}$$

dans lequel les coefficients a, b, c, d dépendent des valeurs des paramètres :

T : période d'échantillonnage

$\gamma = \frac{h}{T}$: rapport de la durée d'échantillonnage à la période d'échantillonnage

P_i : paramètres de la partie linéaire (gain, constante de temps...). Comme en pratique seul le gain de la partie linéaire est réglable, nous considèrerons que les autres paramètres P_i sont fixés.

Le système décrit par les équations aux récurrences linéaires ci-dessus est stable si les racines de l'équation caractéristique (multiplicateurs) :

$$S^2 - (a + d) S + ad - bc = 0$$

ont leur module inférieur à l'unité. La notion de stabilité définie ici est la stabilité locale asymptotique au sens de Ljapunov ; ayant affaire à un modèle mathématique linéaire, il s'agit donc de la stabilité globale, c'est-à-dire indépendante de la condition initiale x_n, y_n choisie.

En posant : $\sigma = a + d = S_1 + S_2$

$\Delta = ad - bc = S_1 S_2$

les conditions de stabilité $|S_1| < 1$, $|S_2| < 1$ s'expriment de la manière suivante :

(a) racines complexes conjuguées :

$$\sigma^2 - 4\Delta < 0 \qquad \Delta < 1$$

(b) racines réelles :

$$\sigma^2 - 4\Delta > 0 \qquad 1 + \sigma + \Delta > 0$$

$$1 - \sigma + \Delta > 0$$

Ces conditions sont résumées sur la figure (I-5) :

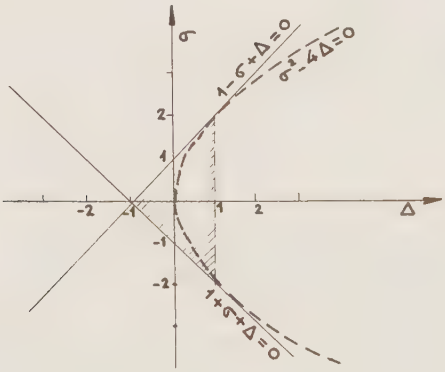


Figure I-5

L'étude de la stabilité du système consiste donc ici à rechercher en fonction des paramètres T, h et K le gain du système, les conditions de vérification des inégalités (a) et (b) . Le choix des paramètres T, h et K se justifie de la manière suivante :

T, h : pour des raisons le plus souvent économiques on a intérêt à choisir une période d'échantillonnage la plus grande possible, compatible avec les conditions de stabilité et de précision imposées, avec une durée de prise d'échantillon h petite, c'est-à-dire un paramètre $\gamma = \frac{h}{T}$ aussi petit que possible. Nous voyons apparaître ici un premier dilemme : doit-on augmenter T ou bien diminuer h ?

K : les contraintes sur la précision du système imposent de choisir un gain K élevé. Nous verrons dans cette analyse que les conditions γ petit, K élevé sont d'autant plus incompatibles que γ est faible et qu'il y a donc lieu de choisir un compromis entre les conditions de stabilité et la précision.

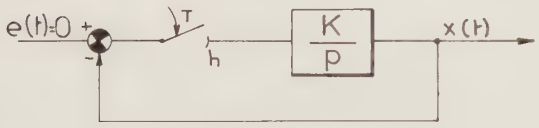
Précisons finalement que la résolution des inégalités (a) et (b) en fonction des paramètres δ et K conduit à la résolution d'équations transcendantes. Pour la résolution de telles équations nous avons utilisé des moyens de calcul numérique, en sachant que δ ne peut varier qu'entre 0 et 1 et en nous fixant un domaine limité de variation de K ($0 \leqslant K \leqslant Kmax$). Avec ces contraintes nous obtenons un nombre fini de solutions.

I-3-1 - Le système commandé est un intégrateur de gain K

En vue de mettre en évidence d'une manière simple certaines propriétés des systèmes à durée d'échantillonnage non nulle, nous faisons ici une étude préliminaire d'un cas très simple : G(p) est un intégrateur de gain K.

I-3-1-1 - Système sans filtre

Le système étudié est celui de la figure I-6 :



$\gamma = \frac{h}{T}$

$x(nT) = x_n$

$x(nT+h) = x_{n+\gamma}$

Figure I-6

Entre deux instants successifs d'échantillonnage nous pouvons écrire :

$$(I\text{-}1) \quad \begin{cases} a & \dfrac{dx}{dt} = -Kx \qquad \text{pour} \quad nT < t \leqslant nT + h \\ b & \dfrac{dx}{dt} = 0 \qquad \text{pour} \quad nT + h < t \leqslant (n+1)\,T \end{cases}$$

Après intégration de ces deux équations nous obtenons :

$$x_{n+\gamma} = x_n \, e^{-K\gamma T} \qquad x_{n+1} = x_{n+\gamma}$$

d'où la récurrence autonome du 1er ordre associée au système :

$$(I\text{-}2) \qquad x_{n+1} = x_n \, e^{-K\gamma T}$$

Le multiplicateur de cette récurrence, $S = e^{-K\gamma T} > 0$ est toujours inférieur à 1 pour K positif, quelles que soient les valeurs de γ et T. Le système est toujours stable.

I-3-1-2 - Système avec bloqueur d'ordre zéro

L'introduction, après le dispositif d'échantillonnage d'un filtre, qui pendant l'ouverture de l'échantillonneur, maintient constante la grandeur de commande, modifie l'équation (I-1-b) de la manière suivante :

$$\frac{dx}{dt} = - K \, x_{n+\gamma} \qquad \text{pour} \qquad nT + h^- < t \leqslant (n+1)T$$

d'où

$$(I\text{-}3) \qquad x_{n+1} = \left[1 - K\,(1-\gamma)\,T\right] \, e^{-K\gamma T} \cdot x_n$$

Le système décrit par la récurrence (I-3) est stable si

$$(I\text{-}4) \qquad -1 < \left[1 - K\,(1-\gamma)\,T\right] \, e^{-K\gamma T} < +1$$

En posant k = KT, l'étude de ces deux inégalités permet de définir dans le plan γ , k, un domaine où le système est stable (figure I-7).

Sur cette figure on remarque que :

- pour $\gamma \geqslant 0,218$ le système est stable quelle que soit la valeur de k = KT
- pour $\gamma < 0,218$ le système admet deux domaines de stabilité en fonction de k. Par exemple pour $\gamma = 0,1$ nous avons stabilité pour

$$0 < k < 2,4 \qquad \text{et} \qquad 27 < k < \infty$$

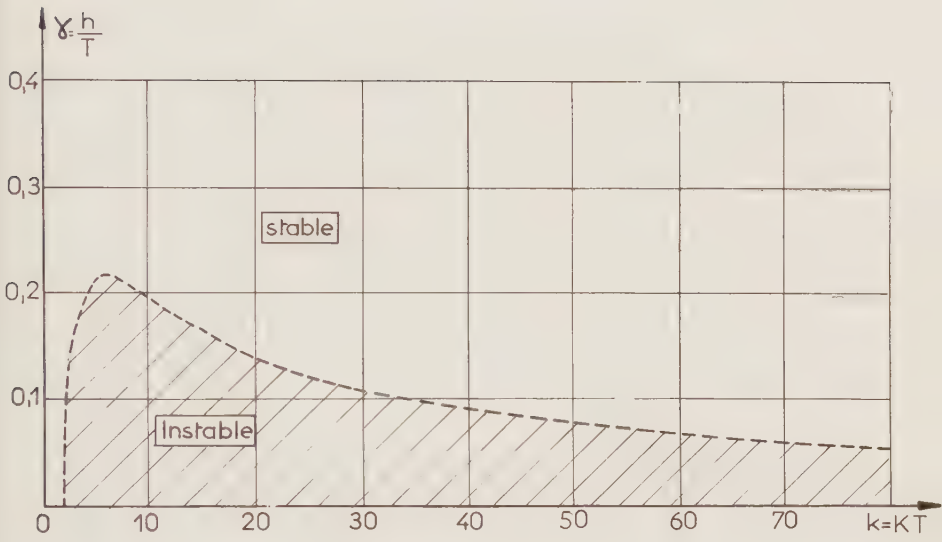


Figure I-7

Cette propriété apparaît intéressante :

- d'une part pour ce système, puisque l'on pourra permettre des valeurs élevées de k (c'est-à-dire de KT), donc une plus grande rapidité du régime transitoire avec une meilleure précision en régime permanent.

- d'autre part pour des systèmes plus complexes la possibilité de propriétés semblables.

Remarque : la frontière de stabilité de la figure I-7 a été tracée à partir de calculs sur les inégalités (I-4) et a été confirmée par simulation directe du système sur calculatrice analogique.

I-3-2 - Le système commandé est constitué par un intégrateur de gain K et une constante de temps τ.

Nous avons ici $G(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}$

I-3-2-1 - Système sans filtre

Pour $nT < t \leq (n+\delta)T$ l'équation du système autonome est

$$\tau \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -Kx \qquad (I-5)$$

Posons

$$t_1 = \frac{t}{\tau} \quad ; \quad T_1 = \frac{T}{\tau} \quad ; \quad h_1 = \frac{h}{\tau} \quad ; \quad x_1 = \frac{x}{\tau}$$

$$K_1 = K\tau \quad ; \quad \frac{dx_1}{dt_1} = x_2 \quad ; \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

l'équation (I-5) devient :

$$(I-6) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt_1} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt_1} = -x_2 - K_1 x_1 \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(I-7) \qquad \underline{x}_{n+\gamma} = \Phi_1(\gamma T) \cdot \underline{x}_n$$

avec pour $K_1 < 0{,}25$

$$\begin{cases} \Phi_1(T) = \dfrac{1}{b-a} \begin{bmatrix} 1-a\,e^{-a\gamma T_1} + (b-1)\,e^{-b\gamma T_1} & (e^{-a\gamma T_1} - e^{-b\gamma T_1}) \\ -K_1(e^{-a\gamma T_1} - e^{-b\gamma T_1}) & be^{-b\gamma T_1} - ae^{-a\gamma T_1} \end{bmatrix} \\ a = 0{,}5\,(1 - \sqrt{1-4K_1}) \qquad b = 0{,}5\,(1 + \sqrt{1-4K_1}) \end{cases}$$

pour $K_1 = 0{,}25$

$$\Phi_1(\gamma T_1) = \begin{bmatrix} 4(1-e^{-0{,}5\gamma T_1} - 0{,}25\gamma T_1 e^{-0{,}5\gamma T_1}) & \gamma T_1 e^{-0{,}5\gamma T_1} \\ -K_1 \gamma T_1 e^{-0{,}5\gamma T_1} & (1-0{,}5\gamma T_1)e^{-0{,}5\gamma T_1} \end{bmatrix}$$

pour $K_1 > 0{,}25$

$$\Phi_1(\gamma T_1) = e^{-0{,}5\gamma T_1} \begin{bmatrix} (\cos\omega\gamma T_1 + \frac{1}{2\omega}\sin\omega\gamma T_1) & (\frac{1}{\omega}\sin\omega\gamma T_1) \\ (-\frac{K_1}{\omega}\sin\omega T_1) & (\cos\omega\gamma T_1 - \frac{1}{2\omega}\sin\omega\gamma T_1) \end{bmatrix}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4K_1 - 1}}{2}$$

Pour $(n+\gamma)T_1 < t_1 \leq (n+1)\,T_1$ nous avons compte tenu du changement de variables ci-dessus :

$$(I\text{-}8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt_1} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt_1} = -\,x_2 \end{cases}$$

soit après intégration :

$$(I\text{-}9)\qquad \underline{x}_{n+1} = \Phi_2\,[(1-\gamma)\,T_1]\;\cdot\;\underline{x}_{n+\gamma}$$

avec

$$(I\text{-}10)\qquad \Phi_2\,[(1-\gamma)T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{(\gamma-1)T_1} \\ 0 & e^{(\gamma-1)T_1} \end{bmatrix}$$

L'équation récurrente associée au système est donc

$$(I\text{-}11)\qquad \underline{x}_{n+1} = \Phi_2\,[(1-\gamma)T_1]\;\cdot\;\Phi_1\,[\gamma T_1]\;\cdot\;\underline{x}_n$$

Les deux multiplicateurs de cette récurrence, S_1 et S_2 sont les valeurs propres de la matrice $[\Phi_2 \cdot \Phi_1]$, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$\det\left[\Phi_2\,\Phi_1 - \bar{S}\right] = 0 \qquad \text{avec } \bar{S} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

L'étude des conditions de stabilité $|S_1| < 1$ et $|S_2| < 1$ dans le plan des paramètres γ, K_1 pour T_1 fixé conduit à un schéma tel que celui de la figure I-8

On remarque sur cette figure une succession de domaines pour lesquels le système est instable, notamment pour une même valeur de γ il existe plusieurs intervalles du gain K_1 qui donnent la stabilité.

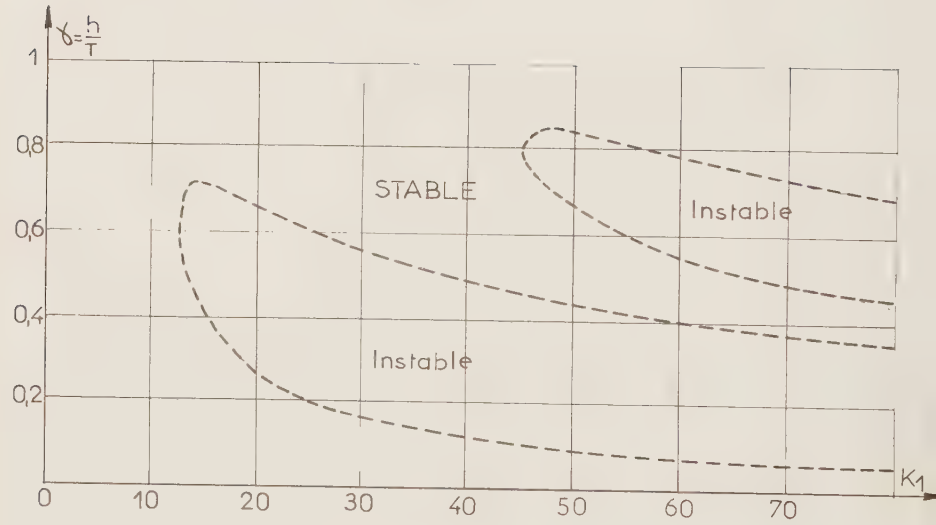


Figure I-8

I-3-2-2 - Système avec bloqueur d'ordre zéro

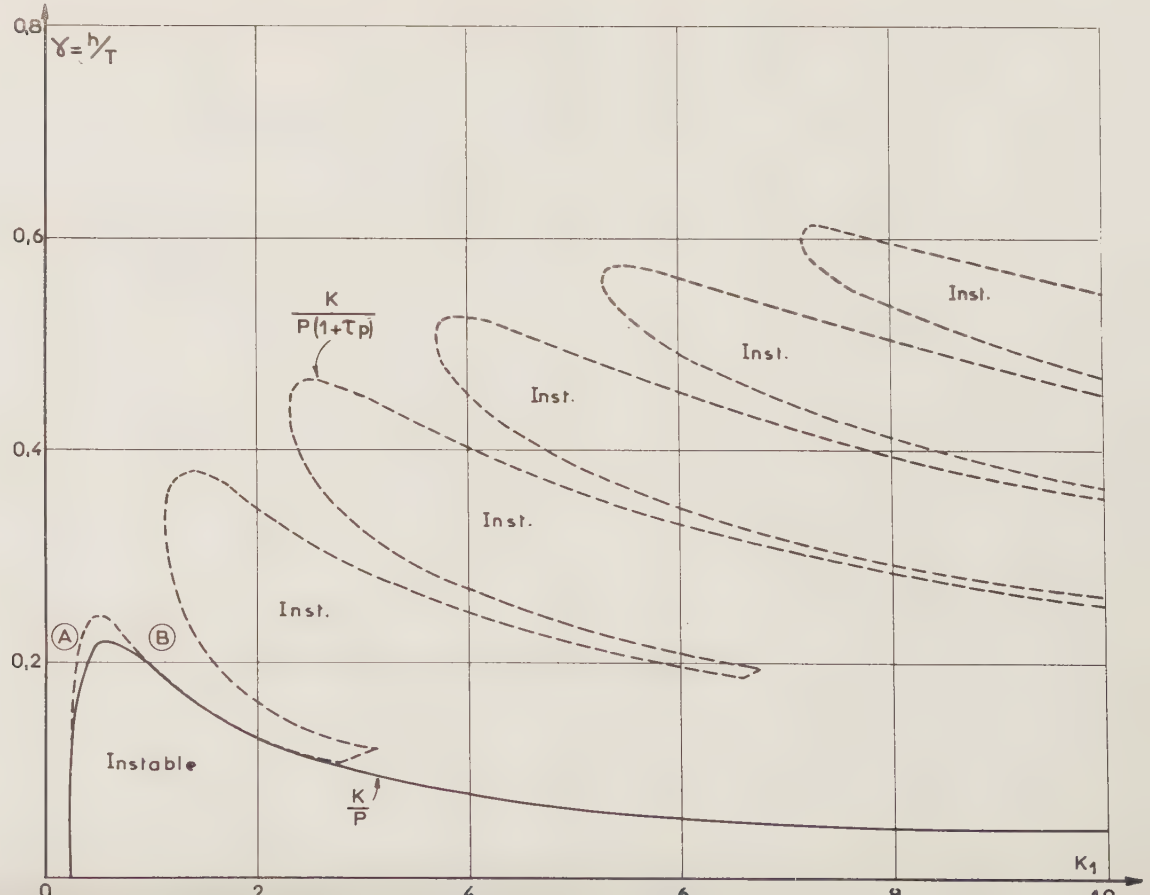
Dans ce cas le système d'équations (I-8) devient :

$$(I\text{-}12)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt_1} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt_1} = -x_2 - k\,x_{1\,n+\gamma} \end{cases}$$

et seule la matrice de transition d'état Φ_2 est modifiée :

$$\Phi_2\left[(1-\gamma)T\right] = \begin{bmatrix} 1+K_1\left(1-(1-\gamma)T_1 - e^{(\gamma-1)T_1}\right) & 1-e^{(\gamma-1)T_1} \\ K_1\left(1-e^{(\gamma-1)T_1}\right) & e^{(\gamma-1)T_1} \end{bmatrix}$$

Dans le plan des paramètres γ , K_1 la configuration des domaines de stabilité est du même type que pour le système sans bloqueur. Sur la figure I-9 nous avons représenté le cas correspondant à $T_1 = 10s$, soit par exemple $T = 1s$, $\tau = 0,1s$.


0,8
γ = h/T
0,6
0,4
0,2
K / P(1+Tp)
Inst.
Inst.
Inst.
Inst.
Inst.
Inst.
A
B
Instable
K / P
K1
0
2
6
8
10

Dans ces deux cas précédemment étudiés, système sans bloqueur, et système avec bloqueur, nous avons mis en évidence des conditions particulières de stabilité, très éloignées des résultats obtenus par des méthodes de calcul approchées comme celles que nous avons citées en I-2-1.
La possibilité d'avoir, pour δ donné, stabilité pour des valeurs élevées du gain K, devient intéressante lorsqu'on s'intéresse à des performances telles que la précision, ou la forme du régime transitoire pour certains types d'entrées.

I-3-3 - Conséquences de la forme particulière des domaines de stabilité sur la précision et le régime transitoire du système

Pour le système étudié ci-dessus, avec ou sans constante de temps, qu'il y ait un filtre ou non, il apparaît que la précision en régime permanent, lors de l'application d'un échelon de vitesse, sera d'autant meilleure que le gain K sera élevé. La forme particulière des domaines de stabilité montre que l'on peut augmenter K dans une certaine mesure.
Nous allons voir ici quelles peuvent être les conséquences de cette augmentation de K sur le régime transitoire et le régime permanent du système.

Considérons à titre d'exemple un cas simple, celui de l'intégrateur avec bloqueur d'ordre zéro, et appliquons un échelon de position e (t) = 1 nous avons :

$$(I\text{-}13)\quad \begin{cases} (a) & x(t) = (x_n - 1)\, e^{-Kt} + 1 \qquad \text{pour } nT < t \leq (n+\gamma)T \\ (b) & x(t) = x_{n+\gamma}\,(1-K\gamma) + K\gamma \text{ pour } (n+\gamma)T < t \leq (n+1)T \end{cases}$$

l'équation (I-13-a) montre que x (t) tend vers 1 d'une manière exponentielle lorsque t augmente. On n'a donc pas de dépassement pendant la fermeture de l'échantillonneur.

Par contre lorsque l'échantillonneur est ouvert x (t) est une fonction linéaire du temps qui atteint sa valeur maximale pour t = (n+1) T.

Pour préciser l'allure du régime transitoire on peut calculer le dépassement maximum, c'est-à-dire en fonction de ce que nous avons vu ci-dessus, l'erreur maximale aux instants nT :
nous avons :

$$(I\text{-}14)\quad \begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left[1 - K(1-\gamma)T\right] e^{-K\gamma T} \\ \varepsilon_{\ldots} \quad 1 \end{cases}$$

la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ est décroissante et l'instant du dépassement maximum est t = T, avec

$$\varepsilon_{max} = \left[1 - K(1-\gamma)T\right] e^{-K\gamma T}$$

Sur la figure I-10 nous avons tracé les courbes à dépassement d constant :

d = 0%, 1%, 5%, 20%, 50%

à partir de la relation

$$1 - K(1-\gamma)T + de^{-K\gamma T} = 0$$

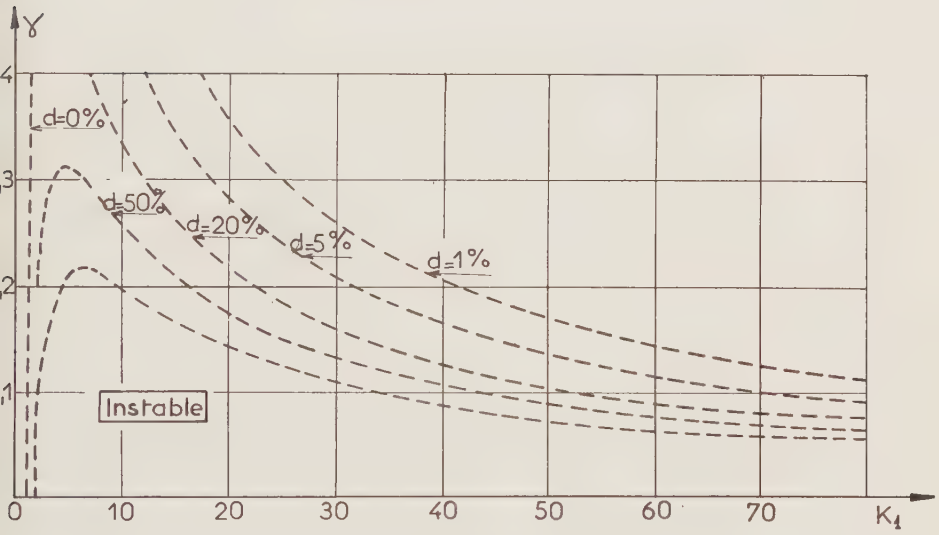


Figure I-10

Ces courbes permettent le choix d'une valeur de K, pour γ donné qui donne un système stable avec un régime transitoire satisfaisant.

Lorsqu'on applique un échelon de vitesse l'équation (I-14) devient :

$$(I\text{-}15) \qquad \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n e^{-K\gamma T}\left[1-K(1-\gamma)T\right] - \frac{1}{K} e^{-K\gamma T}\left[1-K(1-\gamma)T\right] + \frac{1}{K}$$

d'où l'erreur en régime permanent : $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = K^{-1}$

Cette erreur sera d'autant plus petite que K sera élevé.

Dans le cas du système avec intégrateur et constante de temps on aboutit à des conclusions similaires. A titre d'exemple nous avons représenté sur la figure I-11 le régime transitoire du système avec bloqueur d'ordre zéro, pour $\gamma = 0,2$, avec deux valeurs de K_1, l'une correspondant à la zone (A) de la figure I-9, l'autre correspondant à la zone (B) :

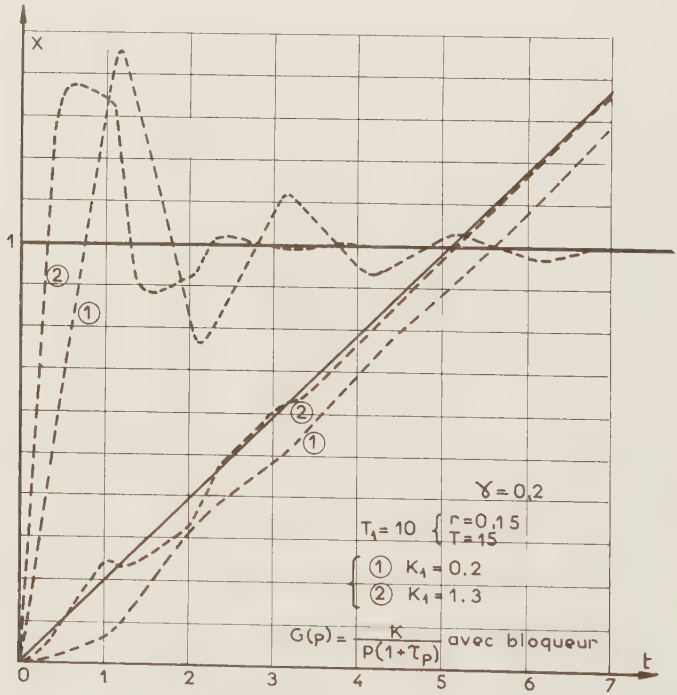


Figure I-11

I-3-4 - Système avec correction tachymétrique

Lorsque le système du 2è ordre envisagé ci-dessus fonctionne dans une zone à gain élevé, on remarque une sensibilité relative aux variations de ce gain K, ainsi qu'aux variations éventuelles de δ . Cette sensibilité peut être diminuée en introduisant une boucle de correction tachymétrique (figure I-12)

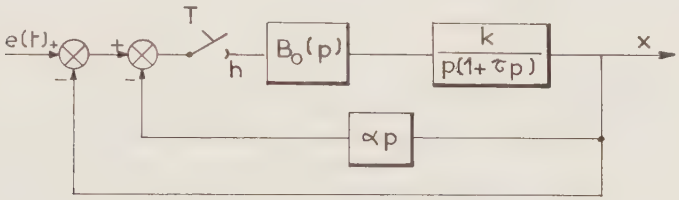


Figure I-12

En effet cette correction a pour effet de limiter, ou même d'annuler en théorie, l'influence de la constante de temps τ , et ainsi de se ramener à un cas voisin de l'intégrateur seul. Sur la figure I-13 nous donnons pour τ = 0,1s et T = 10s la forme des domaines de stabilité pour différentes valeurs de α .
On remarque qu'une légère sous-compensation ($\alpha < \tau$), ou sur-compensation ($\alpha > \tau$) donne des domaines très voisins de celui de la figure I-7.
La correction tachymétrique apporte une amélioration supplémentaire à prendre en considération lors de la synthèse.

I-3-5 - Méthode d'analyse approchée

L'approximation proposée par J.T. TOU [J.6] , qui consiste à assimiler l'impulsion de durée h par M impulsions idéales suivies d'un bloqueur d'ordre zéro consiste en fait à approximer un signal continu par une fonction escalier. Lorsque M est suffisamment élevé

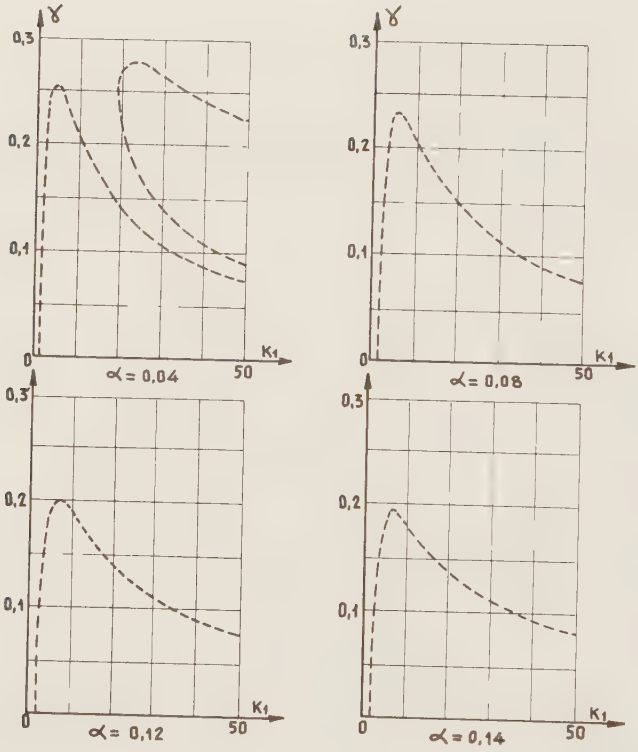


Figure I_13

les résultats obtenus sont très proches de ceux obtenus précédemment. L'avantage d'une telle approximation est de faciliter la mise en équation du système puisqu'on ne considère que la réponse de G(p) à des échelons de position. On n'a qu'une seule forme de matrice de transition d'état à considérer ce qui facilite la programmation du problème sur calculateur numérique.

Remarque : l'étude de cette méthode approchée nous a amené à considérer le cas où M = 2. Dans ce cas on définit un nouveau type d'échantillonnage, constitué d'impulsions périodiques de période T entre lesquelles vient s'insérer une impulsion supplémentaire dont la position h dans le temps peut être modifiée (figure I-14).

Les conditions de stabilité du système d'ordre 2 avec bloqueur d'ordre zéro, pour ce type d'échantillonnage, en fonction de K_1 (gain réduit) et γ la position relative de l'impulsion supplémentaire, sont données sur la figure I-15.

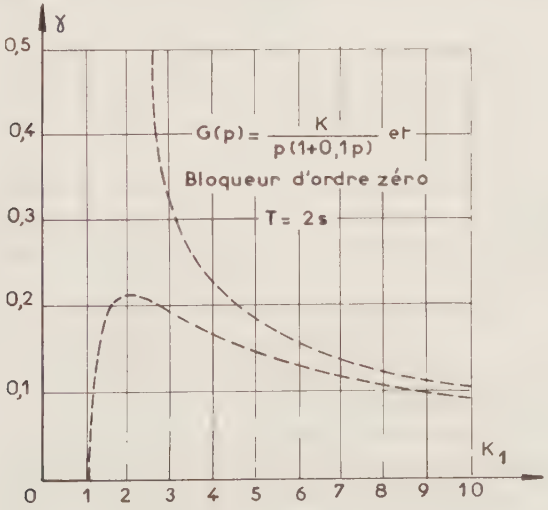


Figure 15

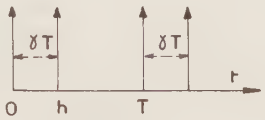
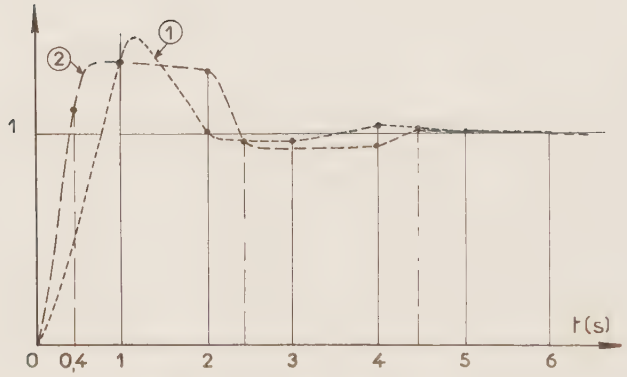


Figure 14



τ = 0,1 s T = 2 s

① K = 1,5 γ = 0,5

② K = 3,3 γ = 0,2

Figure I-16

Pour γ = 0 on a stabilité si K < 1,1. Ceci correspond à un échantillonnage idéal de période T.

Pour γ = 0,5 le système est stable si K < 2,5 et l'échantillonnage est périodique, de période T/2.

On remarque que par rapport à ce dernier cas il est possible avec un même nombre d'impulsions et en diminuant γ, d'augmenter le domaine de stabilité.

Pour γ = 0,25 nous trouvons par exemple K < 3,6.

Une application de cette propriété peut consister par exemple à diminuer l'erreur de vitesse du système par une augmentation de K qui est bien supérieure à ce qui est admissible lorsqu'on échantillonne à T/2. Ceci se fait sans grande altération de la réponse transitoire à un échelon de position (figure I-16). On a ici un moyen, simple à programmer sur calculateur numérique, d'améliorer les performances d'un système à échantillonnage idéal périodique.

I-4 - CONCLUSIONS DE L'ETUDE

Cette analyse amène deux types de conclusions.
D'une part, pour le système étudié nous avons mis en évidence des conditions particulières de stabilité qui ont de l'importance lors de la synthèse.
D'autre part, en ce qui concerne la méthode d'analyse choisie, nous faisons ressortir ici les avantages d'une étude exacte à l'aide des récurrences associées.

I-4-1 - Propriétés mises en évidence

Pour un système du deuxième ordre constitué d'un intégrateur de gain K et d'une constante de temps nous avons constaté que pour une valeur donnée de la durée d'échantillonnage h, on pouvait obtenir la stabilité pour des valeurs élevées du gain K. Cette propriété devient avantageuse lorsqu'on s'intéresse aux performances transitoires et permanentes du système puisque par augmentation du gain K on peut améliorer à la fois la rapidité de réponse et la précision en régime permanent.
Un dispositif d'échantillonnage non instantané, par les propriétés qu'il amène, est susceptible d'être utilisé comme moyen de résoudre certains problèmes de correction, ou au moins d'améliorer les performances d'un système à fonctionnement intermittent.
De plus certains systèmes, tels que ceux décrits en I-1 possédant par nature un échantillonnage non instantané, auront un fonctionnement amélioré dans la mesure où on peut connaître les conditions exactes de stabilité.

I-4-2 - Méthode d'analyse

La description d'un système échantillonné particulier (système du 2è ordre avec durée d'échantillonnage non nulle) par les récurrences associées nous a permis de mettre en évidence des propriétés utiles pour la synthèse. Par comparaison avec la méthode utilisant la transformée de Laplace des signaux échantillonnés on peut dire que dans notre cas la méthode temporelle utilisée est plus simple d'une part parce que l'on reste plus près du phénomène étudié, d'autre part par le volume des calculs à faire. Ce travail reste cependant limité à l'ordre 2. Notons qu'à partir des travaux de KALMAN et BERTRAM [I. 4] il est possible de généraliser ces résultats à un ordre supérieur à deux,

et qu'à partir des travaux poursuivis au L.A.A.S. sur les récurrences, de considérer les cas où il existe des non linéarités essentielles dans le système.

L'approximation de l'impulsion de durée h par un train d'impulsions de Dirac, facilite la mise en équations du système et diminue le volume des calculs. Il y a un choix à faire entre la précision des résultats et le nombre M d'impulsions.

Enfin le cas d'une seule impulsion située entre deux impulsions périodiques peut être envisagé comme un moyen de corriger certains systèmes commandés par un calculateur numérique. Un tel type d'échantillonnage donne un algorithme de calcul bien plus simple que celui correspondant à un réseau correcteur classique.

CHAPITRE 2

Sur les cas critiques complexes et les cas d'exception d'un système échantillonné non linéaire du 2ème ordre.

II-1 - INTRODUCTION

L'analyse de la stabilité locale d'un état stationnaire fixe ou périodique d'un système échantillonné non linéaire peut se déduire de l'approximation linéaire du système d'équations aux récurrences associé, lorsqu'il n'y a pas cas critique au sens de Liapunov pour ces points.

Considérons par exemple le système échantillonné du 2ème ordre décrit par :

$$(II\text{-}1) \qquad \begin{cases} x^*_{n+1} = f(x^*_n, y^*_n) \\ y^*_{n+1} = g(x^*_n, y^*_n) \end{cases}$$

et soient α et β les coordonnées d'un point d'équilibre (point double de la transformation ponctuelle T définie par II-1) tels que :

$$\alpha = f(\alpha, \beta) \qquad \text{et} \qquad \beta = g(\alpha, \beta)$$

Supposons que f et g soient des fonctions telles qu'en ramenant l'origine au point double α , β il soit possible d'écrire (II-1) sous la forme :

$$(II\text{-}2) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = a\,x_n + b\,y_n + X(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = c\,x_n + d\,y_n + Y(x_n, y_n) \end{cases}$$

$X(x_n, y_n)$ et $Y(x_n, y_n)$ étant des polynomes ne contenant que des termes de degré supérieur à 1. A partir des travaux de Liapunov et Poincarré, étendus aux équations aux récurrences il a été montré [II-1] [II-2] [II-3] , que la stabilité locale de la position d'équilibre $x_n = y_n = 0$, se déduit de l'approximation linéaire de (II-2) :

$$(II\text{-}3) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = a\,x_n + b\,y_n \\ y_{n+1} = c\,x_n + d\,y_n \end{cases}$$

"Lorsque les racines de $\begin{vmatrix} a-s & b \\ c & d-s \end{vmatrix} = 0$ (multiplicateurs S_1 et S_2 de la récurrence) ont leur module différent de l'unité, le point double $x_n = y_n = 0$ est localement stable

(stabilité asymptotique au sens de Liapunov) si les multiplicateurs S_1 et S_2 de la récurrence (II-3)

$$S_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + bc}\right]$$

ont leur module inférieur à l'unité".

Dans le cas où au moins l'un des multiplicateurs est égal à 1 en module, la stabilité locale du point singulier ne peut être déduite de l'approximation linéaire (II-3). Nous sommes en présence d'un cas critique au sens de Liapunov. Dans ce cas l'analyse de la stabilité ne peut se faire qu'en tenant compte des termes non linéaires $X(x_n, y_n)$, $Y(x_n, y_n)$ de (II-2).

Remarque : Les conclusions de stabilité basées sur l'approximation linéaire de la récurrence peuvent ne pas avoir de sens pratique, soit dans le cas de stabilité locale, parce que le domaine d'attraction du point singulier est très petit avec d'autres singularités attractives très éloignées de ce domaine (figure II-1-a), soit dans le cas d'instabilité locale, parce que la singularité est entourée d'autres singularités (points doubles ou cycles) attractives et très voisines (figure II-1-b).

Figure II-1-a

Figure II-1-b

On dit alors que le point double $x_n = y_n = 0$ est "pratiquement instable" dans le premier cas, et "pratiquement stable" dans le deuxième cas.

L'étude de la stabilité des cas critiques peut être d'une grande importance pour certains systèmes échantillonnés. En effet pour un système fonctionnant près de la limite de stabilité, des variations de paramètres peuvent amener le module d'un multiplicateur à la valeur 1. Ce peut être le cas par exemple où la période d'échantillonnage varie.

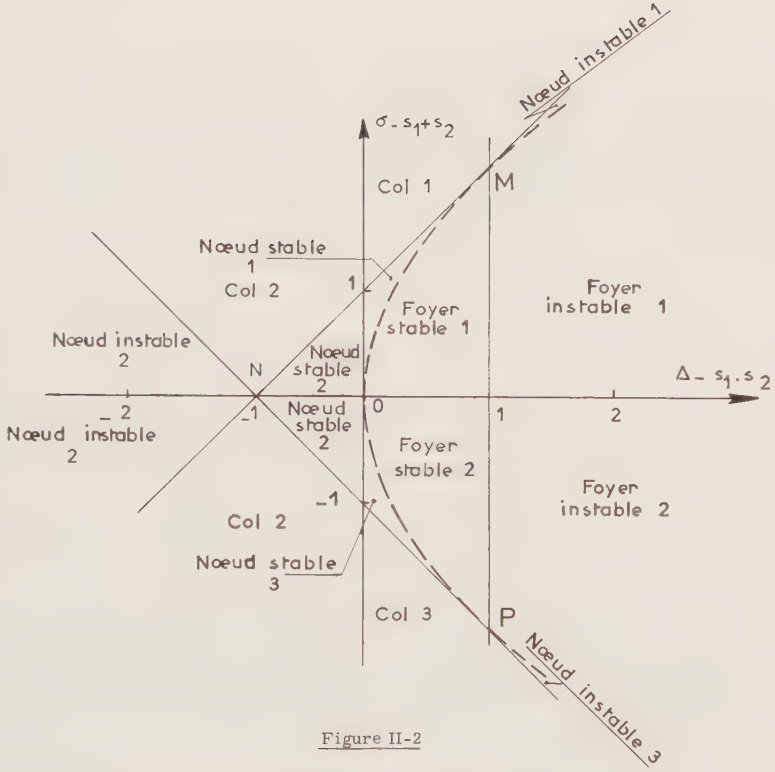


Figure II-2

On considère en pratique deux sortes de cas critiques :

a) les multiplicateurs S_1 et S_2 étant réels, l'un d'entre eux a son module égal à l'unité, l'autre ayant son module inférieur à l'unité. On est en présence d'un cas critique "réel".

b) les multiplicateurs S_1 et S_2 sont complexes conjugués et leur module est égal à l'unité. Nous avons alors un cas critique "complexe".

Posons $\sigma = S_1 + S_2$, $\Delta = S_1 S_2$ [II-4], et traçons dans le plan σ, Δ le lieu des points correspondant aux cas critiques ci-dessus (figure II-2). Les 3 côtés du triangle MNP correspondent à la limite de stabilité du point d'équilibre.
Les côtés MN et NP correspondent à la limite de stabilité avec multiplicateurs réels.
Le côté PM correspond au cas critique de stabilité avec multiplicateurs complexes conjugués.
Les points M, N, P correspondent respectivement à :

$$M : S_1 = S_2 = + 1$$
$$N : S_1 = + 1 \quad S_2 = - 1$$
$$P : S_1 = S_2 = - 1$$

Lorsque sous l'effet d'une variation de paramètre le point figuratif $Q(\sigma, \Delta)$ traverse l'un des côtés du triangle MNP, l'état d'équilibre localement stable devient instable. Dans ce cas, il est nécessaire de savoir si cette instabilité locale entraîne l'instabilité totale du système, ou si ce dernier pourra être encore utilisable.

Le changement de comportement qualitatif de la solution de la récurrence associé au système échantillonné sous l'effet d'une variation d'un paramètre μ est appelé une "bifurcation". Ce changement de comportement qualitatif peut se faire de deux manières :

a) soit progressivement, d'une manière réversible, les effets sur la solutions étant petits avec la perturbation correspondante du paramètre. Ce mode de fonctionnement est lié à un cas critique stable ou encore à une frontière de stabilité non dangereuse au sens de BAUTIN [II-5]

b) soit brutalement, une faible variation du paramètre μ entraînant un changement de comportement qualitatif avec risque d'irréversibilité. Ce mode correspond à un cas critique instable ou encore à une frontière de stabilité dangereuse.

L'étude de ces différentes bifurcations (multiplicateurs réels ou complexes) consiste en l'analyse de trois problèmes importants que nous définissons ci-dessous :

(1) Lorsque l'un des multiplicateurs (ou les deux dans le cas de multiplicateurs complexes conjugués) a son module égal à l'unité, l'autre ayant son module inférieur à 1, le cas critique obtenu pour $\mu = \mu_o$ est-il stable ou non ? Ceci permet de savoir si la valeur particulière $\mu = \mu_o$ constitue ou non une frontière de stabilité dangereuse.

(2) Lorsque $\mu = \mu_o$ quelle est l'allure des trajectoires discrètes au voisinage du point singulier . Nous verrons en effet que dans certains cas particuliers (cas d'exception) la forme particulière de ces trajectoires permet de mettre en évidence un phénomène de résonance non linéaire paramètrique.

(3) Lorsque μ traverse la valeur μ_o , quelle est la nature, le nombre, des singularités qui peuvent apparaître ? Comme nous le verrons dans le chapitre III la réponse à cette dernière question permet de mettre en évidence dans un système échantillonné non linéaire des régimes oscillants très complexes.

Ces problèmes, dans le cas d'un système décrit par une récurrence d'ordre 2, ont fait l'objet de différentes études [II-6][II-7][II-8][II-9] , et dans ce chapitre nous développons l'étude des cas critiques complexes pour un système échantillonné du 2ème ordre, dans deux directions :

a) prolongement des calculs permettant d'analyser les cas critiques complexes.

b) étude des cas d'exception qui se produisent lorsque l'argument φ des multiplicateurs complexes conjugués est commensurable avec 2π. Dans ce cas en effet les résultats de [II-10] [II-8] ne permettent pas de conclure sur la stabilité ou l'instabilité du point singulier. De plus cette analyse nous permet de mettre en évidence un phénomène de résonance non linéaire paramètrique pour un système du 2ème ordre.

II-2 - ETUDE DES CAS CRITIQUES COMPLEXES ET DES CAS D'EXCEPTION POUR UN SYSTEME ECHANTILLONNE NON LINEAIRE DU 2EME ORDRE

Nous étudions ici les propriétés d'une récurrence non linéaire du 2ème ordre, lorsque les multiplicateurs S_1 et S_2 sont complexes conjugués, avec un module égal à l'unité. Après un rappel de définitions sur ce cas critique complexe nous développons les calculs de BABARY [II-11] relatifs à la stabilité du point singulier au cas critique, et nous étudions pour un système échantillonné du 2ème ordre certains cas d'exception qui peuvent donner lieu à un phénomène de résonance non linéaire paramétrique.

II-2-1 - Cas critiques avec multiplicateurs complexes

Lorsque la récurrence (II-2) admet deux multiplicateurs complexes conjugués :

$$S_1 = S\, e^{j\varphi} \qquad S_2 = S\, e^{-j\varphi}$$

il est possible d'écrire (II-2) sous la forme canonique suivante [II-2] [II-13]

$$\text{(II-4)} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n . S . \cos\varphi - u_n . S . \sin\varphi + U(u_n, v_n) \\ v_{n+1} = u_n . S . \sin\varphi + v_n . S . \cos\varphi + V(u_n, v_n) \end{cases}$$

les fonctions $U(u_n, v_n)$ et $V(u_n, v_n)$ étant des fonctions non linéaires de u_n, v_n dont les développements en série au voisinage de l'origine ne contiennent que des termes de degré supérieur ou égal à deux.

La valeur S = 1 donne un cas critique complexe en ce sens qu'il n'est plus possible de déduire la stabilité locale du point double, ou encore l'allure des trajectoires discrètes dans un voisinage suffisamment petit entourant l'origine. LEVI-CIVITA [II-3] pour φ commensurable avec 2π, CIGALA [II-9] pour φ non commensurable avec 2π et BIRKHOFF [II-12] pour φ quelconque, ont étudié la stabilité du point double au cas critique, dans le cas où on entend par "stabilité" que quel que soit $|n| > N$, n entier positif ou négatif, le point de cordonnées (u_n, v_n) reste dans un certain voisinage du point double.

Cette définition correspond à une extension de la notion de point singulier de type "centre" des équations différentielles non linéaires, aux récurrences.
Le problème de la stabilité asymptotique au sens de Liapunov a été abordé en utilisant une équation différentielle auxiliaire [II-14], et une fonction de Liapunov [II-11]

Par extension des travaux de CIGALA [II-9] il a été montré que l'on pouvait déterminer la stabilité asymptotique du point double ainsi que la forme des trajectoires discrètes au voisinage de ce point double.

II-2-1-1 - Rappel des résultats de CIGALA

Le changement de variables

$$\xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y \qquad \eta = \beta_1 (x - y)$$

transforme la récurrence (II-4) en une récurrence à variables complexes x et y

$$\text{(II-5)} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \sum_{i=m}^{\infty} \ldots \\ y_{n+1} = y_n - \sum_{i=m}^{\infty} \ldots \end{cases} \qquad m \geq 2$$

avec

$$\begin{cases} P_i (x_n, y_n) = \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} C_{ip} x^{i-p} y^p \\ Q_i (x_n, y_n) = \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} C^*_{ip} x^p y^{i-p} \end{cases}$$

C_{ip} et C^*_{ip} étant complexes conjugués.

A l'aide d'une substitution de la forme :

$$\text{(II-6)} \quad \begin{cases} \xi = x + \varphi_m(x, y) \qquad \eta = y + \psi_m(x, y) \\ \varphi_m(x, y) = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \alpha_p \xi^{m-p} \eta^p \\ \psi_m(x, y) = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \alpha^*_p \xi^p \eta^{m-p} \end{cases}$$

on détermine les coefficients α_p et α^*_p, complexes conjugués, pour annuler le plus grand nombre de termes de degré m dans la récurrence (II-5) :

Dans un voisinage suffisamment petit de l'origine la substitution (II-6) s'écrit :

$$\text{(II-7)} \quad \begin{cases} x = \xi - \varphi_m(\xi, \eta) + \varphi_m(\xi, \eta) \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial \xi} + \psi_m(\xi, \eta) \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial \eta} + \ldots \\ y = \eta - \psi_m(\xi, \eta) + \psi_m(\xi, \eta) \dfrac{\partial \psi_m}{\partial \eta} + \varphi_m(\xi, \eta) \dfrac{\partial \psi_m}{\partial \xi} + \ldots \end{cases}$$

L'équation (II-5) devient :

$$(II\text{-}8)\qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{j\varphi} - e^{j\varphi} \Psi_m(\xi_n, \eta_n) + P_m(\xi_n, \eta_n) + \Psi_m(\xi_n e^{j\varphi}, \eta_n e^{-j\varphi}) + \dots \\ \eta_{n+1} = \eta_n e^{-j\varphi} - e^{-j\varphi} \Psi_m(\xi_n, \eta_n) + Q_m(\xi_n, \eta_n) + \Psi_m(\xi_n e^{j\varphi}, \eta_n e^{-j\varphi}) + \dots \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{j\varphi} + U_m(\xi_n, \eta_n) + \dots \text{ termes de degré} > m \\ \eta_{n+1} = \eta_n e^{-j\varphi} + V_m(\xi_n, \eta_n) + \dots \text{ termes de degré} > m \end{cases}$$

En choisissant les α_p tels que :

$$(II\text{-}9)\qquad \begin{cases} \alpha_p = \dfrac{C_{mp}\, e^{-j\varphi}}{1 - e^{j\varphi(m-2p-1)}} \\ \alpha^*_p = \dfrac{C^*_{mp}\, e^{-j\varphi}}{1 - e^{-j\varphi(m-2p-1)}} \end{cases} \qquad p = 0, 1, 2, \dots, m$$

on peut éliminer les termes correspondants de degré m dans (II-8). Dans le cas envisagé par CIGALA, φ non commensurable avec 2π, la parité de m joue un rôle dans l'élimination des termes de degré m :

a) si m est pair les relations (II-9) montrent que l'on peut éliminer tous les termes de degré m et (II-8) devient :

$$(II\text{-}10)\qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{j\varphi} + \sum_{i=m+1}^{\infty} P'_i(\xi_n, \eta_n) \\ \eta_{n+1} = \eta_n e^{-j\varphi} + \sum_{i=m+1}^{\infty} Q'_i(\xi_n, \eta_n) \end{cases}$$

et on est ainsi ramené au cas de la récurrence (II-5) avec m impair.

b) si m est impair, $m = 2\gamma + 1$, les relations (II-9) montrent que pour $p = \gamma$ il n'est pas possible de définir les coefficients α_p et α^*_p et la récurrence

(II-8) prend la forme :

$$(II\text{-}11)\qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{j\varphi} + \binom{2\nu+1}{\nu} C_{2\nu+1,\nu}\, \xi_n^{\nu+1} \eta_n^{\nu} + \ldots \; d^\circ > 2\nu+1 \\ \eta_{n+1} = \eta_n e^{-j\varphi} + \binom{2\nu+1}{\nu} C^*_{2\nu+1,\nu}\, \xi_n^{\nu} \eta_n^{\nu+1} + \ldots \; d^\circ > 2\nu+1 \end{cases}$$

Remarques : Lorsque la récurrence est issue du cas a) nous avons après élimination des termes de degré $m + 1 = 2\nu + 1$:

$$(II\text{-}12)\qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{j\varphi} + \binom{2\nu+1}{\nu} \gamma_{2\nu+1,\nu}\, \xi_n^{\nu+1} \eta_n^{\nu} + \ldots \; d^\circ > 2\nu+1 \\ \eta_{n+1} = \eta_n e^{-j\varphi} + \binom{2\nu+1}{\nu} \gamma^*_{2\nu+1,\nu}\, \xi_n^{\nu} \eta_n^{\nu+1} + \ldots \; d^\circ > 2\nu+1 \end{cases}$$

où les coefficients $\gamma_{2\nu+1,\nu}$, $\gamma^*_{2\nu+1,\nu}$ dépendent des coefficients $C_{2\nu,p}$, $C^*_{2\nu,p}$ de la récurrence initiale (II-5).

Dans le cas où $C_{2\nu+1,\nu}$ (ou bien $\gamma_{2\nu+1,\nu}$) est nul c'est-à-dire lorsque dans la récurrence (II-5) il n'existe pas de termes en x_n^2 dans P_3 et en $x_n y_n^2$ dans Q_3 (ou bien en $x_n^{\nu+1} y_n^{\nu}$ et $x_n^{\nu} y_n^{\nu+1}$ dans P'_{m+1} et Q'_{m+1} respectivement) une nouvelle substitution avec $m = 2\nu + 3$ donne une forme semblable à (II-12).

II-2-1-2 - Extension des résultats de CIGALA [II-15]

En posant $\xi = \rho e^{j\theta}$, $\eta = \rho e^{-j\theta}$ la récurrence (II-12) donne :

$$(II\text{-}13)\qquad \rho^2_{n+1} = \rho^2_n + G_\nu\, \rho_n^{2\nu+2} + \ldots \text{ termes de degré } > 2\nu+2$$

avec $$G_\nu = \binom{2\nu+1}{\nu} \left[\gamma_{2\nu+1}\, e^{-j\psi} + \gamma^*_{2\nu+1}\, e^{j\psi} \right]$$

ou bien en posant

$$\tau_\nu = \arg \gamma^*_{2\nu+1}$$

$$G_\nu = 2 \binom{2\nu+1}{\nu} \left|\gamma_{2\nu+1,\nu}\right| \cos(\varphi + \tau_\nu) \qquad \text{(II-14)}$$

La relation (18) permet d'aboutir à un résultat obtenu dans [II-16] en utilisant des fonctions de Liapunov :

"Le point double $u_n = 0$, $v_n = 0$ est asymptotiquement stable au sens de Liapunov si G_ν est négatif et instable si G_ν est positif".

Ce résultat n'est valable que si dans les substitutions successives on ne rencontre pas de cas où

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{2k\pi}{2\nu-2p-1} & \text{lors de l'élimination des termes de degré } m=2 \\ \varphi = \dfrac{2k\pi}{2(\nu-p)} & \text{lors de l'élimination des termes de degré } m = 2\nu+1 \end{cases}$$

ces cas constituant des "cas d'exception" que nous verrons par la suite.

Remarques : Lorsque G_ν est nul il est nécessaire de calculer par de nouvelles substitutions le coefficient $G_{\nu+1}$ ce qui fournit de nouvelles valeurs de φ donnant des cas d'exception. G_ν peut être nul de deux manières.

a) parce que $\left|\gamma_{2\nu+1,\nu}\right| = 0$ c'est-à-dire lorsqu'il n'existe pas de termes en $x_n^{\nu+1} y_n^{\nu}$ dans P' et $x_n^{\nu} y_n^{\nu+1}$ dans Q.

b) parce que $\tau_\nu = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ à $k\pi$ près. Dans ce cas les termes dont les coefficients sont $\gamma_{2\nu+1,\nu}$ et $\gamma^*_{2\nu+1,\nu}$ ne disparaissent pas dans (II-12) et deux nouvelles substitutions donnent :

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{i\varphi} + \binom{2\nu+1}{\nu} \gamma_{2\nu+1,\nu} \xi_n^{\nu+1} \eta_n^{\nu} + \binom{2\nu+1}{\nu+1} \gamma_{2\nu+1,\nu+1} \xi_n^{\nu+2} \eta_n^{\nu+1} + \cdots \\ \eta_{n+1} = \eta_n e^{-i\varphi} + \binom{2\nu+1}{\nu} \gamma^*_{2\nu+1,\nu} \xi_n^{\nu} \eta_n^{\nu+1} + \binom{2\nu+1}{\nu+1} \gamma^*_{2\nu+1,\nu+1} \xi_n^{\nu+1} \eta_n^{\nu+2} + \cdots \end{cases}$$

en posant

$$\rho_{n+1}^2 = \rho_n^2 + G_\nu \rho_n^{2\nu+2} + G_{\nu+1} \rho_n^{2\nu+4} + \ldots$$

Comme les deux nouvelles substitutions n'affectent pas les termes en $\delta_{2\nu+1,\nu}$ et $\delta^*_{2\nu+1,\nu}$ nous avons encore $G_\nu = 0$ et $G_{\nu+1}$ permet de conclure à la stabilité.

Lorsque après une suite de substitutions on arrive à une valeur G_ℓ non nulle, le signe de G_ℓ permet de conclure à la stabilité ou l'instabilité du point double. Ce point est appelé foyer de multiplicité ℓ. Dans le cas où tous les coefficients G sont nuls on a un point de type centre.

Dans [II-11] est développée une méthode qui par utilisation d'une fonction de Liapunov permet de calculer les coefficients G_ν et notamment le coefficient G_1 résultant de l'élimination des termes de degré 2 dans (II- 5), et d'une partie des termes de degré 3. En vue d'étudier certains cas particuliers nous avons été amené à développer ces calculs jusqu'à G_2.

Le principe de ce calcul repose sur l'extension de la seconde méthode de Liapunov aux systèmes discrets [II-14] [II-17] [II-18]. On choisit pour cela la fonction suivante :

$$V_n = x_n y_n + f_3(x_n, y_n) + f_4(x_n, y_n) + \ldots$$

dans laquelle les fonctions $f_k(x_n, y_n)$ comprennent uniquement des termes de degré k choisis tels que la fonction V_n soit une fonction réelle des variables réelles u_n et v_n.

Pour des valeurs de $|x_n|$ et $|y_n|$ suffisamment petites la fonction V_n est définie positive par rapport aux variables u_n et v_n puisque :

$$V_n = x_n y_n + \ldots = u_n^2 + v_n^2$$

On calcule ensuite l'accroissement de V_n entre deux instants d'échantillonnage :

$$\Delta V = V_{n+1} - V_n \qquad \text{qui est de la forme}$$

$$\Delta V = v_3 + v_4 + v_5 + \ldots + v_k + \ldots$$

les V_k étant des polynômes de degré k en x_n et y_n.

Afin que ΔV ait un signe fixe on choisit alors les coefficients des polynômes $f_k(x_n, y_n)$ de telle manière que les polynômes de degré impair de ΔV disparaissent et que ΔV soit de la forme

$$\Delta V = G'_1 (x_n, y_n)^2 + \ldots \text{ termes de degré supérieur}$$

Calcul de G'_1 :

Posons $$f_k(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{k+1} a_{ik}\, x^{k+1-i}\, y^{i-1}$$

En calculant $\Delta V = V_{n+1} - V_n$ en tenant compte de (II-10) avec m = 2. Nous obtenons :

$$V_3 = x_n e^{j\varphi} Q_2 + y_n e^{-j\varphi} P_2 + \sum_{i=1}^{4} a_{i3} (x_n e^{j\varphi})^{4-i} (y_n e^{-j\varphi})^{i-1}$$

$$- \sum_{i=1}^{4} a_{i3}\, x^{4-i}\, y^{i-1}$$

La condition $V_3 \equiv 0$ conduit à poser :

$$\begin{cases} a_{13} = C^*_{22}\, e^{j\varphi} (1 - e^{3j\varphi})^{-1} \\ a_{23} = (2\, C^*_{21} e^{j\varphi} + C_{20}\, e^{-j\varphi})(1 - e^{j\varphi})^{-1} \\ a_{33} = \text{conjugué de } a_{23} = a^*_{23} \\ a_{43} = a^*_{13} \end{cases}$$

Cette condition ne peut être réalisée que si $\varphi \neq \frac{2k\pi}{3}$ (k entier différent d'un multiple de 3).

Lorsque $\varphi = \frac{2\pi k}{3}$ on ne peut pas annuler V_3 et donc conclure sur la stabilité ou l'instabilité du point singulier. Nous retrouvons ici le cas critique à $\varphi = \frac{2\pi k}{3}$ obtenu en éliminant les termes de degré 2 par la substitution de CIGALA.

On choisit ensuite les coefficients a_{i4} et $f_4(x_n, y_n)$ de telle manière que ΔV soit de la forme :

$$V_4 = f_4(x_n, y_n)^2 + V_5 + V_6 + \ldots$$

On est alors amené à poser :

$$\begin{cases} a_{14} = g_1 (C_{3i}, C_{2j}) (1-e^{j\varphi})^{-1} \\ a_{24} = g_2 (C_{3i}, C_{2j}) (1-e^{2j\varphi})^{-1} \\ a_{44} = a^{*}_{24} \\ a_{54} = a^{*}_{14} \end{cases}$$

$g_i(C_{3i}, C_{2j})$ étant des polynômes fonctions des coefficients C_{3i} et C_{2j}. Ces égalités ne sont possibles qu'à la condition que $\varphi \neq \frac{2k\pi}{4}$ (k entier différent d'un multiple de 4).

Nous obtenons alors :

$$G'_1 = 3(C_{31} e^{-j\varphi} + C^{*}_{31} e^{j\varphi}) + 2C_{20} C_{21} e^{-j\varphi} \left[\frac{2}{1-e^{j\varphi}} + \frac{e^{-2j\varphi}}{1-e^{-j\varphi}}\right]$$

$$+ 2C^{*}_{20} C^{*}_{21} e^{j\varphi} \left[\frac{2}{1-e^{-j\varphi}} + \frac{e^{2j\varphi}}{1-e^{j\varphi}}\right] - 4 C_{21} C_{21}^{*} - 2C_{22} C^{*}_{22}$$

qui est une expression réelle identique à celle obtenue par les substitutions de CIGALA lorsqu'on cherche à éliminer les termes de degré 2 et 3, au coefficient $\binom{2\nu+1}{\nu}$ près.
Nous avons : stabilité asymptotique pour le point double si $G'_1 < 0$ instabilité si $G'_1 > 0$

Dans le cas où $G'_1 = 0$ on ne peut pas conclure et on est amené puisque $v_4 \equiv 0$ à annuler v_5 et à conserver dans v_6 le monôme $x^3 y^3$. Nous avons mené ce calcul en considérant pour $P_i(x_n, y_n)$ et $Q_i(x_n, y_n)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. Nous donnons dans l'annexe I le détail de ces calculs. On remarque que l'annulation de v_5 fait apparaître un cas d'exception à $\frac{2\pi}{5}$ et que l'isolement du monôme $x_n^3 y_n^3$ dans v_6 donne un cas d'exception à $\varphi = \frac{2k\pi}{6}$, cas d'exceptions qui correspondent respectivement à l'annulation des termes de degré 4 et 5 dans (II-5) par les substitutions (II-6).

L'expression de G'_2 est assez complexe et nous en donnons ici une forme assez réduite compte tenu du fait que nous fournissons dans l'annexe I un programme permettant ce calcul

$$
\begin{aligned}
G_2 &= C_{30}\,C^{*}_{30} + 9\,C_{31}\,C^{*}_{31} + 9\,C_{32}\,C^{*}_{32} + C_{33}\,C^{*}_{33} \\
&+ 2\,\mathrm{Re}\Big\{4\,\big[C_{20}\,C^{*}_{41} + 3\,C_{21}\,C^{*}_{42} + C_{22}\,C_{43}{}^{*}\big] \\
&+ 6a_{13}\Big[\big(2C_{43}\,e^{j\varphi} + C_{20}\,C_{33} + 6\,C_{21}\,C_{32} + 3\,C_{22}\,C_{31}\big)\,e^{j\varphi} \\
&+ 2\,C_{20}\,C_{21}\,C_{22} + \tfrac{4}{3}\,C^{3}_{21}\Big] \\
&+ 2a_{23}\Big[6C_{42} + \big(C_{22}\,C_{30} + 6C_{21}\,C_{31} + C_{20}\,C_{33}\big)\,e^{-j\varphi} \\
&+ \big(C_{20}\,C^{*}_{30} + 6\,C_{21}\,C^{*}_{31} + 3\,C_{22}\,C^{*}_{32} + C^{*}_{22}\,C_{33} + 6C^{*}_{21}\,C_{32} \\
&+ 3C^{*}_{20}\,C_{31} + 2C^{*}_{41}\big)\,e^{j\varphi} + 2\,\big(C_{21}\,C_{22}\,C^{*}_{22} + \\
&+ C_{20}\,C_{22}\,C^{*}_{21} + C_{20}\,C_{21}\,C^{*}_{20} + 4C^{*}_{21}\,C^{2}_{21}\big)\Big] \\
&+ 4a_{14}\Big[C_{33}\,e^{j\varphi} + 6\,C_{21}\,C_{22}\Big]\,e^{2j\varphi} \\
&+ a_{24}\Big[\Big[6\,C_{32} + C^{*}_{30}\,e^{2j\varphi} + 6\big(C_{21}\,C^{*}_{20} + C_{22}\,C^{*}_{20}\big)\,e^{j\varphi}\Big]\,e^{j\varphi} \\
&+ 6\,\big(C_{20}\,C_{22} + 2\,C^{2}_{21}\big)\Big] \\
&+ a_{25}\,\big(4\,C_{22}e^{2j\varphi}\big) + 2a_{35}\big(C^{*}_{20}\,e^{2j\varphi} + 3C_{21}\big) + 10\,C_{52}\,e^{-j\varphi}\Big\}
\end{aligned}
$$

Le programme de calcul de G_1 et G_2, décrit dans l'annexe I, permet ce calcul soit à partir de la récurrence sous forme canonique (II-4) soit à partir des équations du système échantillonné non linéaire avec correction tachymétrique non linéaire que nous étudions plus loin. De plus ce programme permet, en fonction de l'étude qui suit, de conclure sur les cas d'exceptions possibles jusqu'à G_2 c'est-à-dire avec

$$\varphi = \frac{2k\Pi}{q} \qquad q = 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

II-2-2 - Analyse des cas d'exception

Sans nuire à la généralité de cet exposé nous allons analyser à partir de [II-19] [II-20] [II-21], les cas d'exception rencontrés dans le paragraphe précédent à l'aide d'un exemple concret.

Considérons pour cela le système de la figure II-3.

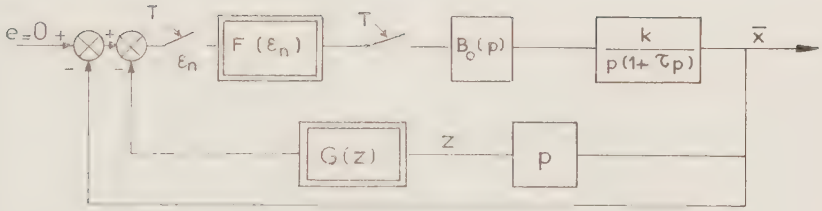


Figure II-3

dans lequel $F(\varepsilon_n)$ est la caractéristique non linéaire de la chaîne directe, G(z) et p une boucle de correction tachymétrique non linéaire, $B_o(p)$ un bloqueur d'ordre zéro.

Les deux caractéristiques non linéaires sont supposées uniformes et continues, telles que

F(o) = 0 et G(o) = 0

G(p) est une fonction de transfert du 2ème ordre de la forme

$$G(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}$$

En incluant le gain K dans la non linéarité F et en effectuant un changement de variable on se ramène à un système avec $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$.

En considérant le système autonome (e = 0) et en posant $\frac{dX}{dt} = Y$ nous avons :

$$(II\text{-}15) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y \\ \\ \frac{dY}{dt} = -Y + F\left[-X_n - G(Y_n)\right] \end{cases}$$

Après intégration de (II-15) entre deux instants d'échantillonnage nT et (n+1)T nous obtenons :

$$(II\text{-}16)\qquad \begin{cases} X_{n+1} = X_n + a\,Y_n - b\,F\left[-X_n - G(Y_n)\right] \\ Y_{n+1} = c\,Y_n + a\,F\left[-X_n - G(Y_n)\right] \end{cases}$$

avec

$$c = e^{-T} \qquad a = 1 - c \qquad b = a - T$$

Les points doubles de cette récurrence sont définis par

$$X_{n+1} = X_n$$
$$Y_{n+1} = Y_n$$

soit :

$$F\left[-X_n - G(Y_n)\right] = 0$$

En particulier le point $X_n = 0$, $Y_n = 0$ est un point double de la récurrence. Supposons qu'autour de ce point double F et G soient développables en série

$$F(\varepsilon_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i k_i \varepsilon_n{}^i \qquad G(Y_n) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j Y_n{}^j$$

ce qui donne :

$$(II\text{-}17)\qquad F\left[-X_n - G(Y_n)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \left(X_n + \sum_{j=1}^{\infty} h_j Y_n{}^j\right)^i$$

On peut alors écrire la récurrence (II-16) sous la forme :

$$(II\text{-}18)\qquad \begin{cases} X_{n+1} = X_n (1 - b\,k_1) + Y_n (a - b\,k_1 h_1) - b\,F_2^{\infty} \\ Y_{n+1} = X_n (a\,k_1) + Y_n (c + a\,k_1 h_1) + a\,F_2^{\infty} \end{cases}$$

avec

$$F_2^{\infty} = k_1 \sum_{j=2}^{\infty} h_j Y^j + \sum_{i=2}^{\infty} k_i \left(X_n + \sum_{j=1}^{\infty} h_j Y_n{}^j\right)^i$$

Le calcul de la somme σ et du produit Δ des multiplicateurs S_1 et S_2 de la récurrence (II-18) donne :

$$(II\text{-}19)\qquad \begin{cases} \sigma = 1 + c + k_1 (a h_1 - b) \\ \Delta = (1 - b k_1)(c + a k_1 h_1) - a k_1 (a - b k_1 h_1) \end{cases}$$

Les conditions pour obtenir un cas critique complexe sont :

$$(II\text{-}20)\qquad \begin{cases} \Delta = 1 \\ |\sigma| < 2 \end{cases}$$

soit :

$$\Delta = 1 \Longrightarrow k_1 = \frac{3}{Tc - a + a h_1} \qquad \text{ou} \qquad h_1 = \frac{1}{k_1} + \frac{a - cT}{a}$$

$$\sigma < 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } h_1 > \frac{b}{a} & -\frac{3+c}{a h_1 - b} < k_1 < \frac{a}{a h_1 - b} \\ \text{si } h_1 < \frac{b}{a} & \frac{a}{a h_1 - b} < k_1 < -\frac{3+c}{a h_1 - b} \\ \text{si } h_1 = \frac{b}{a} & |\sigma| < 2 \text{ quel que soit } k_1 \text{ vérifiant } \Delta = 1 \end{cases}$$

Remarques : Si nous faisons h_1 = constante nous pouvons écrire

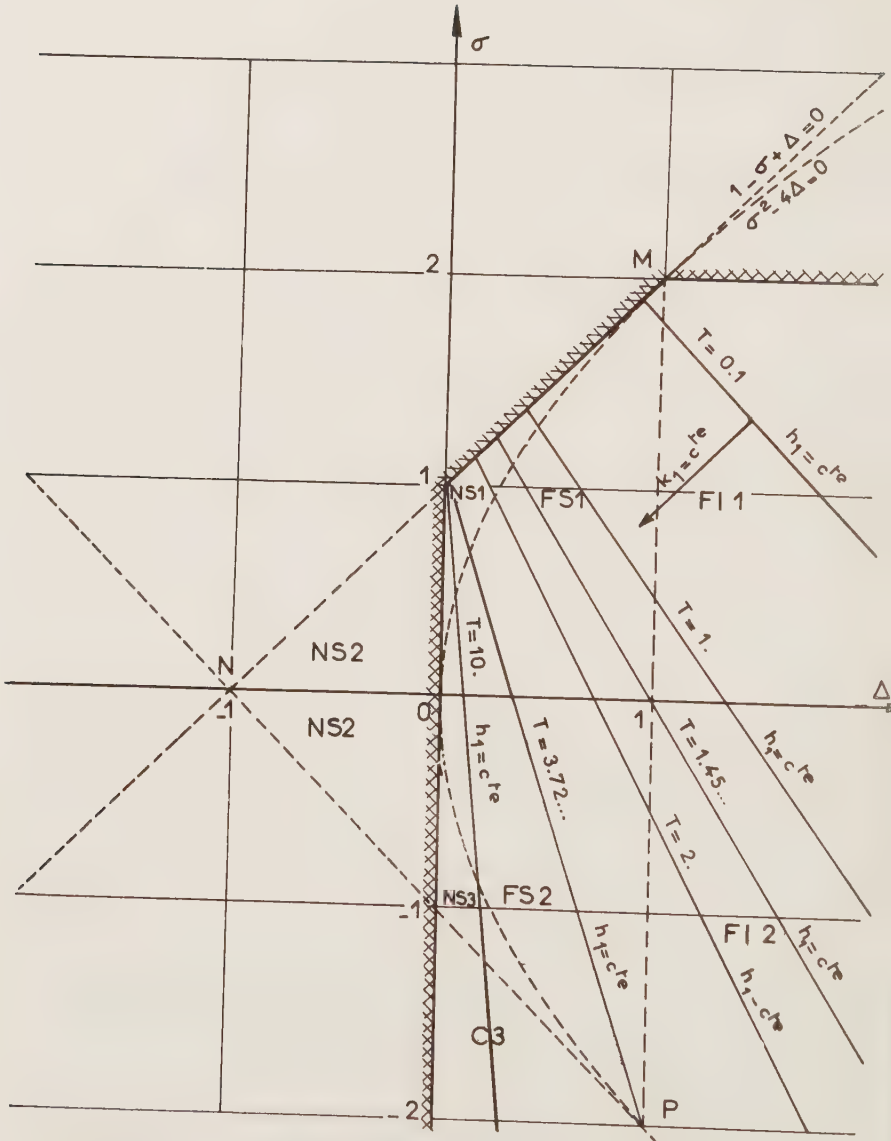
$$\sigma_{k1} = 1 + c + (\Delta - c) \frac{a h_1 - b}{a h_1 - a + Tc}$$

qui est une droite dans le plan σ , Δ . Sur la figure II-4 nous avons représenté cette droite pour $h_1 = 0$ et différentes valeurs de T, qui est en fait ici compte tenu du changement de variables signalé précédemment le rapport de la période d'échantillonnage à la constante de temps τ de G(p) :

$$T = \frac{[\text{réel}]}{\tau}$$

Dans ce cas nous pouvons avoir des bifurcations complexes pour

$$0 \leqslant T \leqslant 3,72 \ldots$$



- Figure.II.4 - Domaine de fonctionnement et bifurcations (Point double)

De plus en calculant l'argument φ des multiplicateurs au cas critique nous trouvons que :

$\varphi = \frac{2\pi}{3}$ pour $T = 2,5517$ et $k_1 = 1,27505$

$\varphi = \frac{2\pi}{4}$ pour $T = 1,45252$ et $k_1 = 1,79751$

$\varphi = \frac{2\pi}{5}$ pour $T = 0,8909$ et $k_1 = 2,63042$

$\varphi = \frac{2\pi}{6}$ pour $T = 0,59858$ et $k_1 = 3.70902$

Ces calculs nous permettent de conclure que dans cet exemple particulier les bifurcations complexes et les cas d'exception correspondants ont de grandes chances de se produire. En effet des considérations pratiques, de précision notamment, imposent de choisir une période d'échantillonnage faible devant la constante de temps τ de G(p), donc d'avoir T petit.

Si nous faisons k_1 = constante nous trouvons

$$\sigma_{h_1} = \Delta + 1 + a k_1$$

qui dans le plan $\sigma\ \Delta$ est une droite de pente + 1 telle que σ et Δ diminuent lorsque h_1 augmente. Ceci permet de visualiser dans le plan σ , Δ l'effet d'une correction tachymétrique linéaire dans le système étudié. Remarquons en particulier que l'on ne pourra jamais traverser le segment MN et donc obtenir les cas critiques réels correspondants.

Au cas critique complexe les multiplicateurs de la récurrence (II-18) sont :

$$(II\text{-}21) \qquad S_{1,2} = \frac{-a \pm j\sqrt{1 - a^2}}{2} = e^{\pm j\varphi}$$

Effectuons le changement de variables :

$$(II\text{-}22) \qquad X = x + y \qquad Y = p_1 x + p_2 y$$

avec :

$$(II\text{-}23) \qquad p_{1,2} = \frac{S_{1,2} - (1-b\,k_1)}{a-b\,k_1\,h_1} = \frac{1}{a-b\,k_1\,h_1}\left[\cos\varphi - 1 + b\,k_1 \pm j\sin\varphi\right]$$

nous obtenons :

$$(II\text{-}24) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n\, e^{j\varphi} + \dfrac{bp_2+a}{p_1-p_2}\, f_2^{\infty} = x_n\, e^{j\varphi} + \displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} P_i\,(x_n, y_n) \\ f_2^{\infty} = F_2^{\infty}\,(x, y) \\ y_{n+1} = y_n\, e^{-j\varphi} + \dfrac{bp_1+a}{p_2-p_1}\, f_2^{\infty} = y_n\, e^{-j\varphi} + \displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} Q_i\,(x_n, y_n) \end{cases}$$

qui est de la même forme que la récurrence (II-5) qui sert de point de départ aux substitutions de CIGALA.

En nous limitant à l'ordre 5 nous avons déterminé les coefficients C_{ip} et C^{*}_{ip} correspondant à la récurrence (II-24). Nous donnons les détails de ces coefficients dans l'annexe I.

Dans le cas particulier où il n'y a pas de correction tachymétrique nous avons :

$$C_{ip} = k_i \frac{bp_2+a}{p_1-p_2} \qquad \text{avec} \quad i \geq 2, \quad p = 0, 1, 2, \ldots i$$

II-2-2-1 - Cas d'exception à $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

Ce cas se produit lorsque dans (II-24) on cherche à éliminer par substitution les termes du 2ème degré. En effet nous avons :

$$\xi = x + (a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2)$$

$$\eta = y + (a_2^{*} x_2 + 2a_1^{*} xy + a_0^{*} y^2)$$

et après substitution dans (II-24)

$$(II\text{-}25)\quad \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{j\varphi} + U_2(\xi_n, \eta_n) + \ldots \text{ termes de degré} \geq 3 \\ \eta_{n+1} = \eta_n e^{-j\varphi} + V_2(\xi_n, \eta_n) + \ldots \text{ termes de degré} \geq 3 \end{cases}$$

La condition $U_2 = V_2 = 0$ nous amène à choisir

$$(II\text{-}26)\quad \begin{cases} \alpha_0 = C_{20} e^{-j\varphi} (1 - e^{j\varphi})^{-1} \\ \alpha_1 = C_{21} e^{-j\varphi} (1 - e^{-j\varphi})^{-1} \\ \alpha_2 = C_{22} e^{-j\varphi} (1 - e^{-3j\varphi})^{-1} \end{cases} \qquad \alpha^*_p = \text{conjugué de } \alpha_p$$

Lorsque $\varphi = \frac{2k\pi}{3}$, k entier différent d'un multiple de 3, on ne peut pas définir les valeurs de α_2 et α^*_2 donc on ne peut éliminer les termes en y^2 dans $P_2(x, y)$ et x^2 dans $Q_2(x, y)$ et G_1 ne peut être défini :

$$(II\text{-}27)\quad \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{j\varphi} + C_{22} \eta_n^2 + \ldots \\ \eta_{n+1} = \eta_n e^{-j\varphi} + C^*_{22} \xi_n^2 + \ldots \end{cases}$$

En posant $\xi = \rho e^{j\theta}$ et $\eta = \rho e^{-j\theta}$ la récurrence (II-27) devient :

$$(II\text{-}28)\quad \begin{cases} \rho_{n+1} e^{j\theta_{n+1}} = \rho_n e^{j(\theta_n + \varphi)} + C_{22} \rho_n^2 e^{-2j\theta_n} + \ldots \\ \rho_{n+1} e^{-j\theta_{n+1}} = \rho_n e^{-j(\theta_n + \varphi)} + C^*_{22} \rho_n^2 e^{2j\theta_n} + \ldots \end{cases}$$

soit :

$$(II\text{-}29)\quad \begin{cases} \rho_{n+1}^2 = \rho_n^2 + \rho_n^3 \left[C_{22} e^{-j(\varphi + 3\theta_n)} + C^*_{22} e^{j(\varphi + 3\theta_n)} \right] + \ldots \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \rho + \arg \left[1 + C_{22} \rho_n e^{-j(3\theta_n + \varphi)} \right] + \ldots \end{cases}$$

Pour ρ suffisamment petit nous pouvons écrire :

$$(II\text{-}30)\quad \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \varphi - |c_{22}|\,\rho_n \sin(3\theta_n + \varphi + \tau_{21}) + \dots \\ \tau_{21} = \arg c^*_{22} \end{cases}$$

ce qui permet de définir des directions invariantes telles que :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \varphi$$

soit d'après (II-30)

$$\theta = \frac{k\pi - \varphi - \tau_{21}}{3}$$

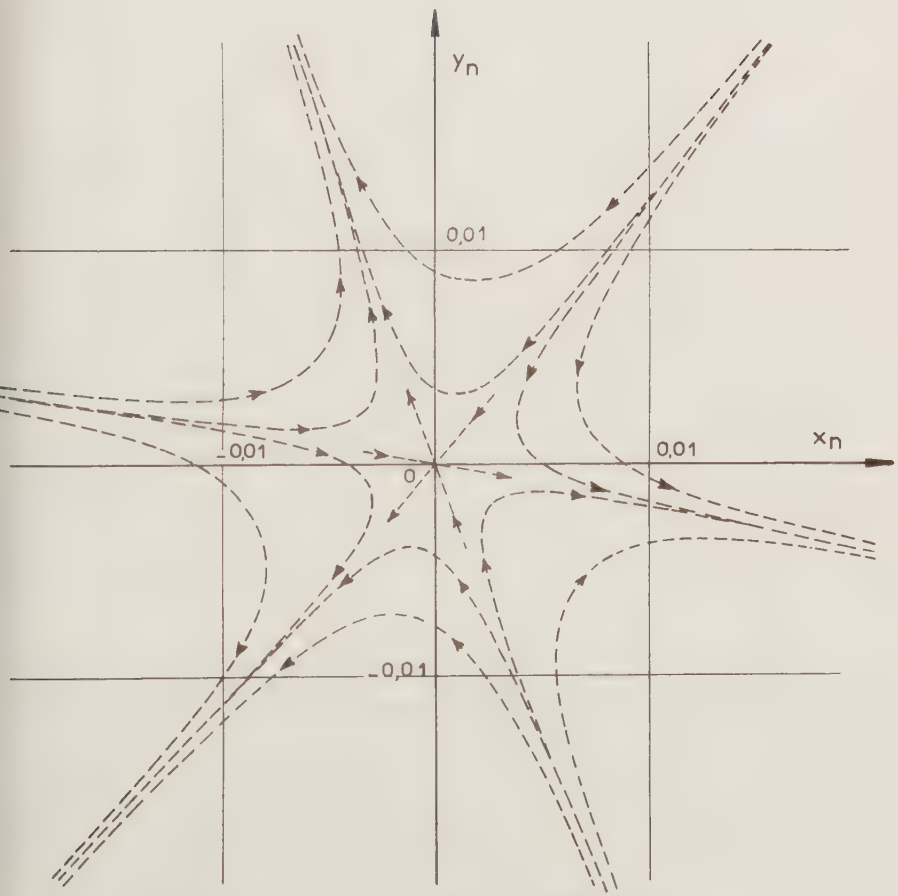
Ces directions sont les directions invariantes de la récurrence troisième (c'est-à-dire de transformation ponctuelle T^3) :

$$(II\text{-}31)\quad \begin{cases} (a)\ \rho^2_{n+3} = \rho^2_n + 3\rho^3_n \left[c_{22}\, e^{-j(\varphi+3\theta_n)} + c^*_{22}\, e^{j(\varphi+3\theta_n)}\right] \\ (b)\ \theta_{n+3} = \theta_n - 3|c_{22}|\,\rho_n \sin(3\theta_n + \varphi + \tau_{21}) + \dots \end{cases}$$

L'examen de la dérivée de θ_{n+3} par rapport à θ_n, pour ρ fixé, et de la récurrence (II-31 a) écrite sous la forme :

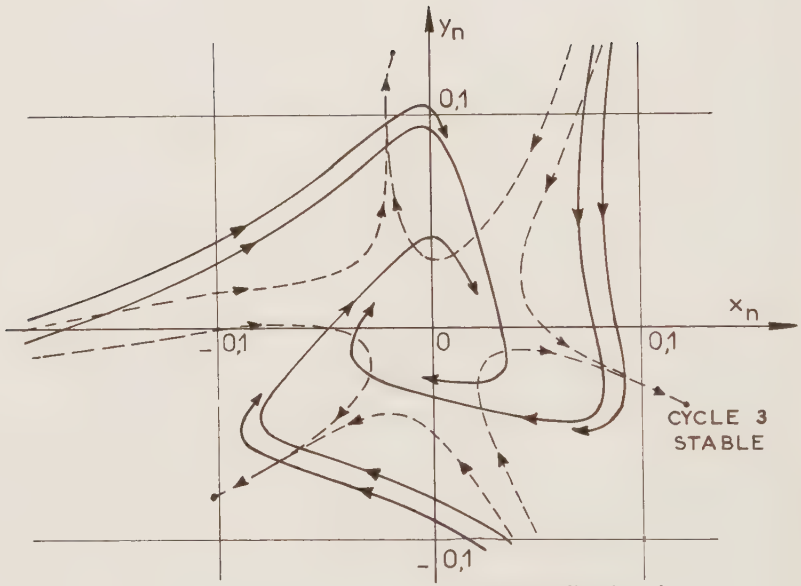
$$\rho^2_{n+3} = \rho^2_n + 6|c_{22}|\rho^3_n \cos(3\theta_n + \varphi + \tau_{21}) + \dots$$

montre que les directions θ sont alternativement attractives et répulsives en θ et que pour ρ suffisamment petit elles sont les asymptotes des trajectoires discrètes (figure II-



_ Figure. II.5 _ Trajectoires discrètes de

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos\varphi - y_n \sin\varphi + 8{,}25\, x_n^3 + 0{,}75\, x_n^2 y_n \\ y_{n+1} = x_n \sin\varphi + y_n \cos\varphi - 3{,}75\, x_n^3 + 2{,}25\, x_n^2\, y_n \end{cases}$$



Trajectoires discrètes de

pour
- ---- $\varphi = \frac{2\pi}{3}$
- —— $\varphi \neq \frac{2\pi}{3}$

$$x_{n+1} = x_n \cos\varphi - y_n \sin\varphi + 8{,}25\, x_n^3 + 0{,}75\, x_n^2 y_n$$

$$y_{n+1} = x_n \sin\varphi + y_n \cos\varphi - 3{,}75\, x_n^3 + 2{,}25\, x_n^2 y_n$$

Figure II-6

Nous obtenons ici un point hyperbolique au sens de BIRKHOFF [II-12] . Une conséquence importante de cette forme particulière des trajectoires autour du point singulier est qu'en se plaçant au voisinage du cas d'exception, les trajectoires discrètes pourront avoir une forme du type de celle de la figure II-6. On remarque sur cette figure une certaine résonance. Celle ci sera d'autant plus accusée que φ l'argument du multiplicateur se rapproche de $\frac{2\pi}{3}$ pour donner les trajectoires de la figure II-5 avec $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

On met ici en évidence un phénomène de résonance non linéaire paramétrique qui d'un point de vue pratique est d'une grande importance. En effet, bien que l'on prenne une condition initiale voisine du point singulier, ce phénomène peut dans une phase transitoire éloigner

le point de fonctionnement (x_n, y_n) du régime d'équilibre et ainsi donner aux variables x_n, y_n des valeurs non admissibles pour le système .

Remarques : Lorsque dans (II-24) les termes en y^2 et x^2 n'existent pas respectivement dans P_2 et Q_2 (dans l'exemple choisi, sans correction tachymétrique, cela signifie qu'il n'y a pas de termes du 2ème degré dans le développement de F) il est possible de calculer G_1. Cependant si G_1 est nul soit parce que $|\gamma_{31}| = 0$ soit parce que $\arg |\gamma_{31}| = \frac{\pi}{2} - \varphi$ on est amené à effectuer une nouvelle substitution pour éliminer les termes du 4ème degré, en vue du calcul de G_2. Si $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ on ne peutpas éliminer les termes en

$$\xi_n^4 \quad \text{et} \quad \xi_n \eta_n^3 \quad \text{dans} \quad P_4(\xi_n, \eta_n)$$

$$\eta_n^4 \quad \text{et} \quad \xi_n^3 \eta_n \quad \text{dans} \quad Q_4(\xi_n, \eta_n)$$

On a alors :

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n e^{j\varphi} + \gamma_{40} \xi_n^4 + \gamma_{43} \xi_n \eta_n^3 + \dots \\ \rho_{n+1} = \eta_n e^{-j\varphi} + \gamma^*_{40} \eta_n^4 + \gamma^*_{43} \eta_n^3 \xi_n + \dots \end{cases}$$

Une étude de cette récurrence après transformations en coordonnées polaires permet d'aboutir à une conclusion de même type que précédemment en ce qui concerne la forme des trajectoires. On définit ici aussi 6 directions invariantes.

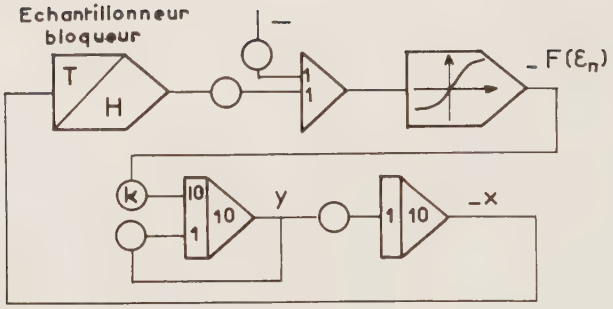
Pour le système échantillonné non linéaire étudié ici voyons à quelles conditions il est possible d'obtenir un tel cas d'exception et un phénomène de résonance non linéaire paramétrique :

a) Système sans correction tachymétrique

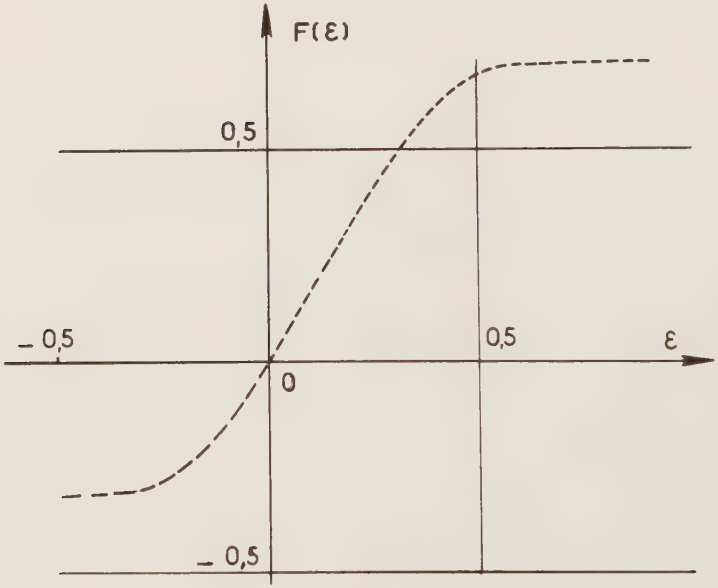
Nous avons dans ce cas

$$C_{ip} = k_1 \frac{bp_2 + a}{p_1 - p_2} \qquad \begin{matrix} i \geq 2 \\ p = 0, 1, 2, \dots, i \end{matrix}$$

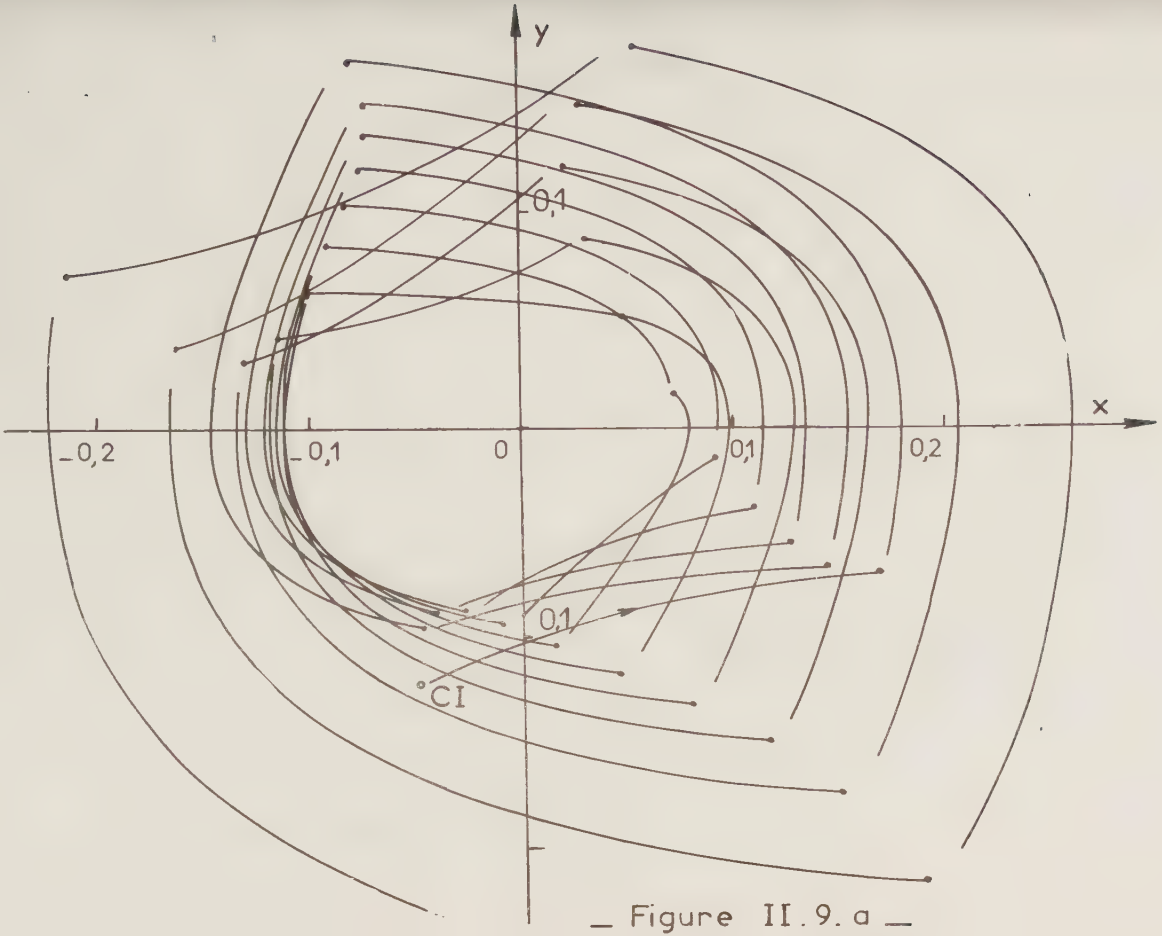
Il apparaît tout d'abord que ce cas d'exception ne peut pas se produire lorsque la caractéristique non linéaire est a symétrie impaire. En effet le développement en série de F ne contient pas de termes de degré pair et on peut donc calculer G_1. Lorsque la caractéristique F n'est pas symétrique nous avons $C_{22} \neq 0$ et donc possibilité de cas d'exception. Pour montrer ceci d'une manière expérimentale nous avons simulé le système de la figure II-3 sur calculatrice analogique (figure II-7) avec une non linéarité de type saturation (figure II-8) non symétrique.



— Figure . II.7 —



— Figure.II . 8 —



_ Figure II.9.a _

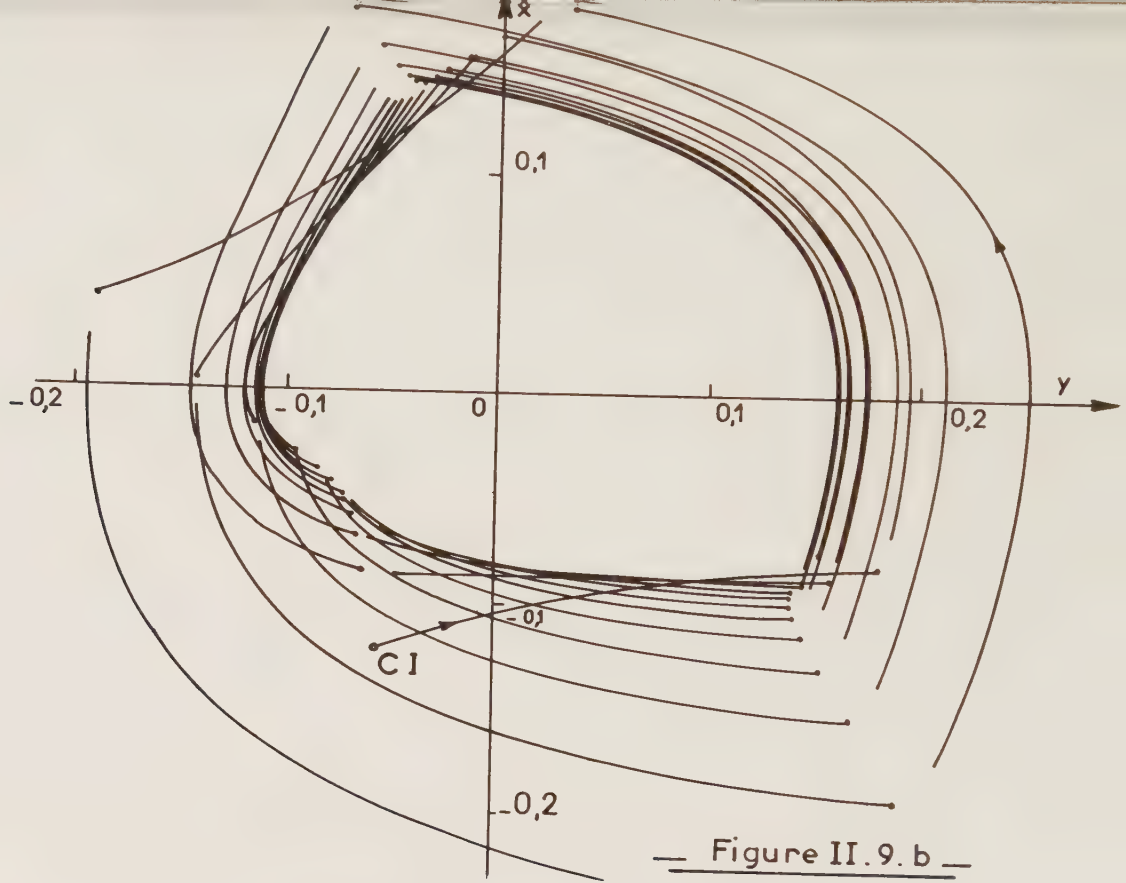
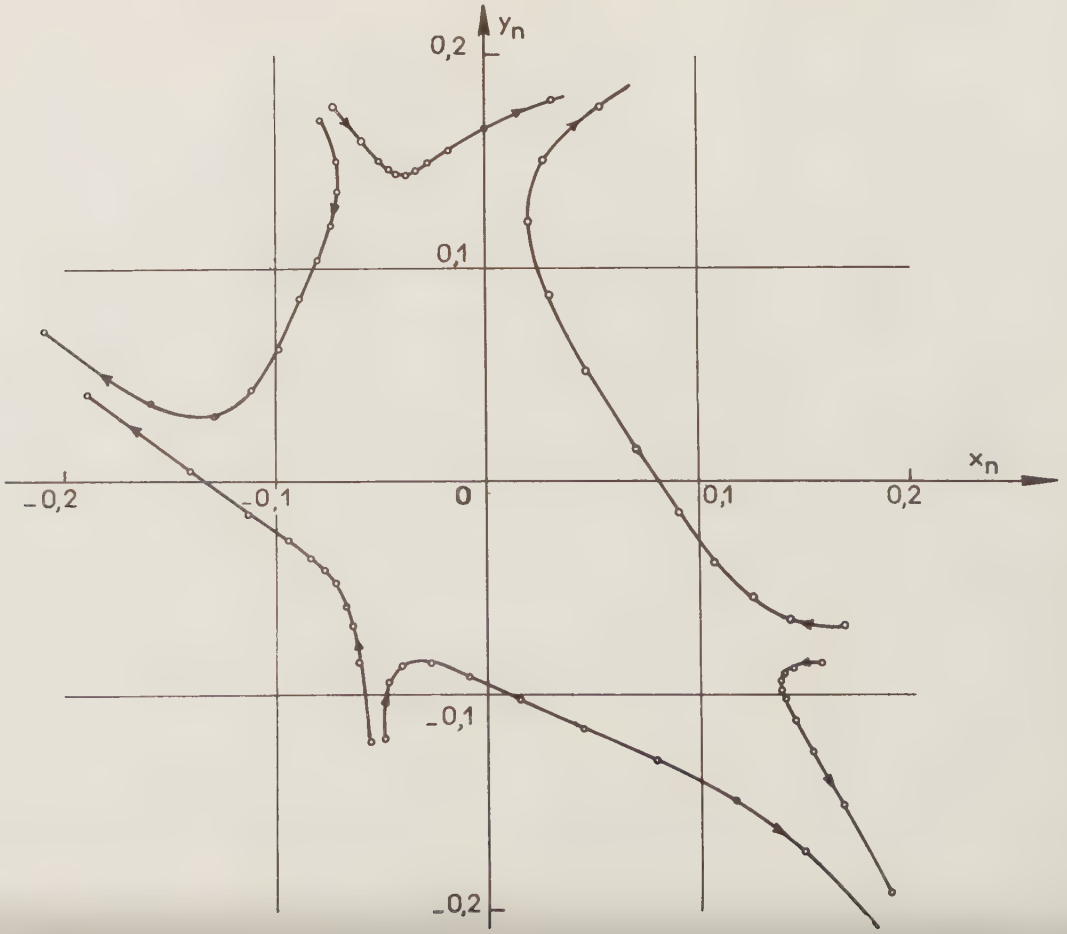


Figure II.9.b


y_n
0,2
0,1
x_n
−0,2
−0,1
0
0,1
0,2
−0,1
−0,2

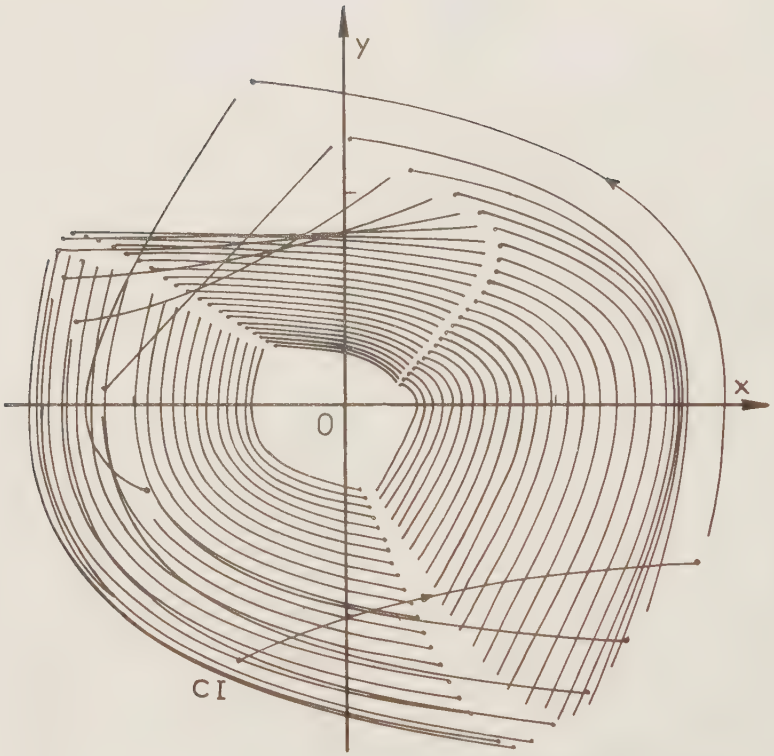


Figure II .10

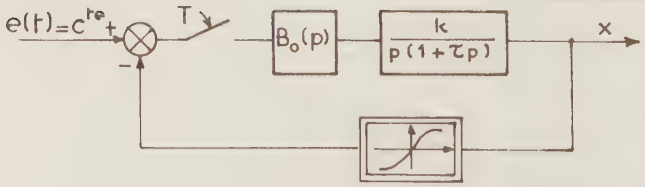


Figure. II.11

En fixant la période d'échantillonnage à T = 2, 55 s et en ajustant expérimentalement le gain K on arrive à obtenir facilement les conditions du cas d'exception à $\frac{2\pi}{3}$
Sur les figures II-9 nous donnons les trajectoires continues dans le plan X, Y en repérant les instants d'échantillonnage. Nous constatons que les trajectoires discrètes sont de forme "hyperboliques" déformées d'une part par la non-linéarité F, d'autre part par le fait que nous ne sommes pas dans le plan x, y.
Sur la figure II-9 c, nous avons reporté les valeurs de X_n et Y_n pour les conditions initiales correspondant aux figures II-9 a et b.
En modifiant légèrement la valeur de K nous obtenons des trajectoires discrètes qui présentent une certaine résonance tout en convergeant vers l'origine (figure II-10).

Pour un système échantillonné simple et assez courant dans la pratique nous avons montré expérimentalement que l'on pouvait obtenir un cas d'exception à $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ et donc une possibilité de résonance non linéaire paramétrique. Il faut remarquer que le système que nous avonssimulé correspond soit à celui de la figure II-3 avec F non symétrique, soit à celui de la figure II-11 avec une entrée e (t) constante et non nulle et une caractéristique non linéaire à symétrie impaire.

b) Système avec correction tachymétrique

Le tableau des coefficients C_{ip} donné dans l'annexe I permet de conclure que pour deux caractéristiques non linéaires F et G à symétrie impaire les coefficients C_{ip} sont nuls pour i pair. Dans ce cas là on ne peut pas avoir de cas d'exception à $\varphi = \frac{2\pi}{3}$
Par contre si l'une ou l'autre (ou les deux) des caractéristiques non linéaires n'est pas à symétrie impaire nous avons un tel cas d'exception.

II-2-2-2 - Cas d'exception à $\varphi = \frac{2\pi}{4}$.

Après une première substitution dans (II-24) pour éliminer les termes de degré 2, l'élimination des termes de degré 3 amène à poser :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \gamma_{30}\, e^{-j\varphi}\,(1 - e^{-3j\varphi})^{-1} \\ \alpha_1 = \gamma_{31}\, e^{-j\varphi}\,(1 - e^{0})^{-1} \\ \alpha_2 = \gamma_{32}\, e^{-j\varphi}\,(1 - e^{-3j\varphi})^{-1} \\ \alpha_3 = \gamma_{33}\, e^{-j\varphi}\,(1 - e^{-4j\varphi})^{-1} \end{cases}$$

Lorsque $\varphi = \frac{2\pi}{4}$ on ne peut pas définir le coefficient α_3 et il restera dans la récurrence des termes en η_n^3 pour P_3 et ξ_n^3 pour Q_3 en plus des termes $\xi_n^2\,\eta$ et $\eta_n^2\,\xi_n$ qui permettaient le calcul de G_1 :

$$\text{(II-32)} \qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n\, e^{j\varphi} + \gamma_{31}\,\xi_n^2\,\eta_n + \gamma_{32}\,\eta_n^3 + \dots \\ \eta_{n+1} = \eta_n\, e^{-j\varphi} + \gamma_{31}^{*}\,\xi_n\,\eta_n^2 + \gamma_{32}^{*}\,\xi_n^3 + \dots \end{cases}$$

En posant $\xi = \rho\, e^{j\theta}$ \ $\eta = \rho\, e^{-j\theta}$ nous obtenons

$$\text{(II-33)} \qquad \begin{cases} \rho_{n+1}^2 = \rho_n^2 + [g_1 + 2\,|\gamma_{33}|\,\cos\,(\varphi + 4\theta_n)]\,\rho_n^4 + \dots \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \varphi - \frac{1}{2}\,|\gamma_{31}|\,\sin(\varphi + \tau_1) + |\gamma_{33}|\,\sin(\varphi + 4\theta_n + \tau_3)]\,\rho_n^2 + \dots \end{cases}$$

avec

$$g_1 = \gamma_{31}\, e^{-j\varphi} + \gamma_{31}^{*}\, e^{j\varphi} = 2\,|\gamma_{31}|\,\cos\,(\varphi + \tau_1)$$

$$\tau_1 = \arg\,\gamma_{31}^{*} \qquad \tau_3 = \arg\,\gamma_{33}^{*}$$

La recherche des directions invariantes amène à poser :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \varphi \qquad (\text{ou } \theta_{n+4} = \theta_n)$$

soit

$$\sin\,(\varphi + 4\theta_n + \tau_3) = -\frac{|\gamma_{31}|}{|\gamma_{33}|}\,\sin\,(\varphi + \tau_1) = a$$

équation qui n'admet de solution que si $|a| \leq 1$

Sans détailler les démonstrations faites dans[II-20] nous donnons ici les différents cas qui peuvent se produire :

Figure II.12.1

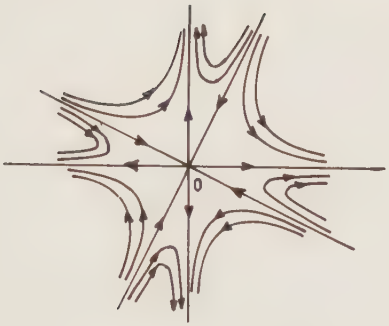


Figure II.12.2

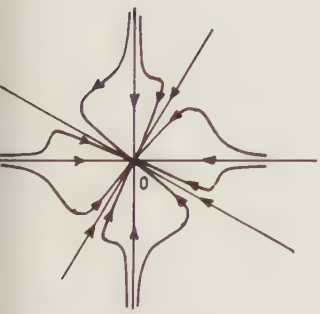


Figure.II.12.3

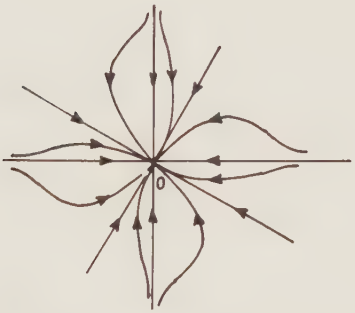


Figure.II.12.4

① $|a| > 1$: Les trajectoires discrètes sont situées sur des spirales déformées par les non linéarités. Une condition suffisante de stabilité est :

$$G_1 < 0 \qquad |G_1| > 2\,|\gamma_{33}| \qquad \text{(figure II-12-1)}$$

② $|a| < 1 \qquad |\gamma_{31}| < |\gamma_{33}|$ nous obtenons ici des trajectoires "hyperboliques" avec 8 directions invariantes (figure II-12-2).

③ $|a| < 1 \qquad |\gamma_{31}| > |\gamma_{33}| \qquad |G_1| < 2\,|\gamma_{33}|$ Les trajectoires dicrètes sont situées sur les courbes de la figure II-12-3, tangentes en 0 aux directions invariantes, convergeant vers l'origine si $G_1 < 0$, divergeant si $G_1 > 0$

④ $|a| < 1 \qquad |\gamma_{33}| < |\gamma_{31}| \quad |G_1| > 2\,|\gamma_{33}|$: ρ_n est une fonction monotone de n, décroissante pour $G_1 < 0$, croissante pour $G_1 > 0$ (figure II-12-4).

Pour le système échantillonné étudié voyons, en fonction de la forme de la non linéarité, quels comportements nous pouvons avoir autour d'un point singulier lorsque $\varphi = \frac{2\pi}{4}$.

a) Système sans correction tachymétrique

Dans le cas d'une caractéristique F à symétrie impaire

$$F(\varepsilon) = -k_1\varepsilon - k_3\varepsilon^3 - k_5\varepsilon^5$$

nous avons :

$$\begin{cases} C_{ip} = 0 & \text{pour i pair} \\ C_{ip} = k_i \dfrac{bp_2^{\,i}+a}{p_1-p_2} & \text{pour i impair} \end{cases}$$

d'où en particulier :

$$\gamma_{31} = 3\,C_{31} = 3\,\gamma_{33} = 3\,k_3\,\frac{bp_2+a}{p_1-p_2}$$

Le cas d'exception à $\varphi = \frac{2\pi}{4}$ est obtenu pour

$$T = 1{,}452 \ldots \qquad k_1 = -1{,}798 \ldots$$

Nous avons :

$$a = -\frac{|\gamma_{31}|}{|\gamma_{33}|}\sin(\varphi + \tau_1) = -3\cos\tau_1$$

$$\tau_1 = \arg\left(3\,k_3\,\frac{bp_1+a}{p_2-p_1}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Tc-a}{a-T}\,\operatorname{sign} k_3\right)$$

nous trouvons : $|a| = 2{,}545 = \text{constante}$

Les trajectoires discrètes sont donc des spirales du type de la figure II-12-1.
Les conditions de stabilité sont :

$$G_1 = 2\,|\gamma_{31}|\,\cos(\varphi + \tau_1) = -2\,|\gamma_{31}|\,\sin\tau_1 < 0$$

$$|\gamma_{31}|\,|\sin\tau_1| > |\gamma_{33}| \qquad \text{ou} \qquad |\sin\tau_1| > \frac{1}{3}$$

or d'une part $\sin\tau_1 = 0{,}53$

et d'autre part $G_1 = -3\,k_3\,(2a - Tc) = -0{,}66\,k_3$

Nous en déduisons que le cas critique est stable si k_3 est positif c'est-à-dire pour une non linéarité de type doux.
Nous retrouvons ici, pour le cas d'exception à $\varphi = \frac{2\pi}{4}$, la même conclusion que dans II-11 pour les cas critiques complexes en dehors des cas d'exception : le cas critique est stable si la non linéarité est de type doux.

Dans le cas d'une caractéristique non symétrique nous avons : $C_{ip} = k_i \dfrac{bp_2 + a}{p_1 - p_2}$ pour i pair ou impair, et d'après [II-9]

$$\begin{cases} \gamma_{31} = C_{20}\,C_{21}\,(3j+1) - 2\,C_{21}\,C^{*}_{21}\,(j-1) - C_{22}\,C^{*}_{22}\,(j+1) + 3\,C_{31} \\ \gamma_{33} = C_{21}\,C_{22}\,(j-1) - C^{*}_{20}\,C_{22}\,(j+1) + C_{33} \end{cases}$$

Compte tenu de la forme complexe des inégalités en jeu nous avons programmé cette étude sur calculateur numérique (cf annexe I) en vue de permettre une exploration de différentes valeurs de k_i. Nous avons ainsi pu mettre en évidence les différents cas d'exception décrits ci-dessus pour $\varphi = \frac{2\pi}{4}$

Remarque : pour $k_3 = 0$ et $k_i = 0$ pour $i > 4$ il n'est pas possible d'obtenir le cas "hyperbolique", en effet nous avons :

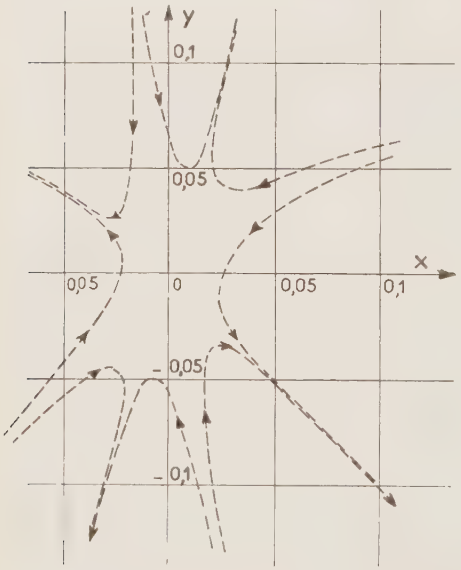
$$\frac{bp_2 + a}{p_1 - p_2} = -0{,}5\left[b + j\,(a - Tc)\right] = \alpha + j\beta$$

$$|\gamma_{31}|^2 = 4k_2^4\,.\,10\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \qquad |\gamma_{33}|^2 = 4\,k_2^4\,(\alpha+\beta)^2\,(\alpha^2+\beta^2)$$

Pour $T = 1{,}45$ $\alpha = 0{,}343$ $\beta = -0{,}213$ $|\gamma_{31}| > |\gamma_{33}|$
quel que soit k_2.

b) Système avec correction tachymétrique

Dans le cas de deux caractéristiques F et G non linéaires à symétrie impaire les calculs que nous avons menés nous ont permis de trouver des couples de valeurs k_3 et h_3 donnant $|a| < 1$ mais nous n'avons jamais trouvé de cas ou $|\gamma_{31}| < |\gamma_{33}|$. Il apparaît ici que le cas hyperbolique est très improbable, peut être même impossible. Une démonstration rigoureuse à partir des expressions de γ_{31} et γ_{33} qui dépendent de k_3 et h_3 et h_1 (ou k_1) devient extrêmement complexe et il nous a semblé préférable de mettre en oeuvre un programme de calcul qui peut être utilisé pour tout système décrit par une récurrence d'ordre 2, plutôt que de faire une démonstration utilisable pour un seul exemple.



$$\begin{cases} F(\varepsilon_n) = -k_1\varepsilon_n + k_2\varepsilon_n^2 - k_3\varepsilon_n^3 \\ G(Y_n) = h_1 Y_n + h_2 Y_n^2 + h_3 Y_n^3 \end{cases}$$

$T = 1\ s \Rightarrow k_1 = -3,164 \quad h_1 = 0,102$

$k_2 = 4,0$

$k_3 = 2,0$

$h_2 = 0,5$

$h_3 = 0$

Figure II-13

Dans le cas de caractéristiques non linéaires à symétrie impaire nous avons 5

paramètres disponibles (k_1 ou h_1, k_2, k_3, h_2, h_3) pour vérifier 3 inégalités. Il est évident qu'on peut obtenir tous les cas possibles; sur la figure II-13 nous donnons un exemple de cas "hyperbolique".

II-3 - CONCLUSIONS

Dans ce chapitre nous avons étudié certains cas d'exception pour un système échantillonné non linéaire du 2ème ordre, cas qui se produisent lorsque l'argument φ des multiplicateurs de la récurrence associée au système est commensurable avec 2π.

Ces cas d'exception sont mis en évidence soit lorsqu'on cherche à calculer le coefficient G_ℓ, permettant d'étudier la stabilité du cas critique complexe, à partir du choix d'une fonction de Liapunov, soit lorsqu'on effectue la même étude par les substitutions de CIGALA. Ces différentes substitutions ne peuvent se faire que si

$$\varphi \neq \frac{2k\Pi}{q} \qquad \begin{array}{l} q = 3,4,5 \ldots \\ k \text{ entier différent d'un multiple de } q. \end{array}$$

Nous avons distingué ici deux types de cas d'exception ; celui où q est impair et celui où q est pair :

- Lorsque q est impair, une étude de la récurrence au voisinage du point singulier permet de mettre en évidence 2 q directions invariantes dans le plan des variables x et y qui sont alternativement attractives et répulsives et constituent les asymptotes des trajectoires discrètes. Le point singulier est alors un point hyperbolique.
Une conséquence importante de cette forme particulière des trajectoires au voisinage du point singulier est qu'en considérant le système près de sa limite de stabilité on a des trajectoires discrètes présentant une résonance.

- Lorsque q est pair, la nature du point singulier peut être différente suivant la forme des non linéarités. La possibilité de cas hyperbolique, donc de résonance non linéaire paramétrique existe ici aussi.

L'étude d'un système échantillonné non linéaire du 2ème ordre avec ou sans correction tachymétrique non linéaire a permis de mettre en évidence des cas d'exception pour q pair et q impair.

Pour q impair le cas d'exception n'existe que si les caractéristiques non linéaires ne sont pas à symétrie impaire. En prenant q = 3 et une caractéristique non linéaire, non symétrique nous avons mis en évidence par simulation sur calculatrice analogique un tel cas d'exception avec le phénomène de résonance non linéaire paramètrique correspondant.
Pour q pair, l'interprétation des inégalités qui conduisent aux différentes formes de trajectoires discrètes au voisinage du point singulier, a demandé la mise au point d'un programme de test, qui a partir des équations du système échantillonné et des paramètres caractérisant les non linéarités permet de connaître ces formes de trajectoires.
En particulier pour q = 4 et des caractéristiques non linéaires à symétrie impaire, une exploration d'un grand nombre de valeurs de paramètres permet de penser qu'un cas hyperbolique est peu probable.

CHAPITRE 3

Sur les oscillations dans un système échantillonné non linéaire

III-1 - INTRODUCTION

Un problème important lors de la synthèse d'un système échantillonné qui possède des non linéarités est celui de l'analyse des oscillations qui peuvent naître dans ce système. En effet pour un système dont on sait que des variations de paramètres peuvent l'amener à la limite de stabilité, il est nécessaire de connaître les formes de régimes périodiques qui peuvent apparaître, ne serait-ce qu'en vue de limiter leurs effets. De plus dans certains systèmes la forme des non linéarités (relais, quantificateur d'amplitude...) fait que ces oscillations constituent le régime normal de fonctionnement.

De nombreux auteurs [III-1] à [III-10] se sont penchés sur le problème de la détermination des oscillations dans un système échantillonné non linéaire. L'essentiel de ces publications porte sur la détermination des oscillations de période T' = NT (N entier, T période d'échantillonnage, et les méthodes d'analyse préconisées, développement en série de Fourier ou de fonctions orthogonales [III-1] [III-2] [III-3] , utilisation de la transformée en z et z modifiée [III-4] [III-5] [III-6] , approximation du 1er harmonique [III-7] [III-8] [III-9] aboutissent en fait à la résolution d'un système d'équations algébriques non linéaires dont la solution est d'autant plus difficile que la fréquence des oscillations est basse, c'est-à-dire que N est élevé.
La résolution de ce problème à partir des récurrences associées revient à rechercher les solutions de l'équation

$$\underline{x}_{n+N} = \underline{x}_n$$

qui est aussi un système d'équations algébriques non linéaires. Dans [III-10] on trouve certains résultats concernant l'existence de solutions périodiques ou presque périodiques d'un système d'équations aux différences.

Lorsqu'on regarde ces différentes méthodes, on constate qu'elles sont efficaces pour la détermination des oscillations de fréquences relativement élevées (N = 2, 3, 4...) mais deviennent rapidement complexes lorsqu'on s'intéresse aux oscillations basse fréquence (N élevé ou même infini).

Notre propos est de montrer ici comment l'étude des bifurcations des différents points singuliers ou cycles rencontrés lors de l'analyse d'un système échantillonné non linéaire, permet de mettre en évidence des cycles d'ordre élevé donc de basse fréquence, ainsi que la présence d'oscillations combinées à très basse fréquence, d'oscillations presque périodiques. Ces problèmes sont en effet très importants car dans un système réel

les oscillations de fréquences relativement élevées sont plus ou moins filtrées parles éléments dynamiques du système et sont donc limitées en amplitude, alors qu'il n'en est pas de même pour les oscillations de basse fréquence.

III-2 - RAPPELS SUR LES BIFURCATIONS

Lorsqu'un système décrit par un système d'équations aux différences finies arrive à la limite de stabilité, soit que l'un des multiplicateurs atteigne la valeur ± 1, soit que deux multiplicateurs complexes conjugués aient leur module égal à 1, on obtient un cas critique réel ou complexe. MIRA et coll.[II-6] [II-8] [II-15] [II-19]ont étudié les traversées des cas critiques complexes et réels, sous l'effet d'une variation de paramètre, dans le cas d'une récurrence d'ordre deux.

Etant donné une récurrence d'ordre 2 :

$$(III-1) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n, \mu) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n, \mu) \end{cases}$$

dépendant d'un paramètre μ, et telle que pour $\mu = \mu_o$ un des multiplicateurs ou les deux dans le cas de multiplicateurs complexes conjugués, a son module égal à l'unité, il s'agit d'étudier les changements de comportement qualitatif des solutions de III-1 (points doubles ou cycles), lorsque μ varie en traversant la valeur μ_o :

- bifurcation avec multiplicateurs complexes [III-15] $S_1 = e^{j\varphi}$, $S_2 = e^{-j\varphi}$: lorsque f et g sont deux fonctions réelles, analytiques en x et y, continues, différentiables par rapport à μ au voisinage de μ_o, et lorsque dans la récurrence III-1 le paramètre μ varie de sorte qu'en un point double du plan (x_n, y_n) les multiplicateurs $S(\mu) = e^{\pm j\varphi(\mu)}$ deviennent $e^{\pm j\varphi_o}$ pour $\mu = \mu_o$ avec $\left(\frac{dS}{d\mu}\right)_{\mu=\mu_o} \neq 0$ une trajectoire discrète située sur une courbe (Γ) fermée, entourant P, peut naître à partir de P dans les conditions suivantes :

a) si $G_\ell < 0$ (G_ℓ coefficient défini par les substitutions de Cigala, donc en dehors des cas d'exception vus précédemment) P est asymptotiquement stable pour $\mu = \mu_o$, et la traversée du cas critique est telle qu'un point double asymptotiquement stable donne naissance à un point double instable entouré d'une courbe (Γ) attractive (stable).

b) si $G\ell > 0$, P est instable pour $\mu = \mu_o$ et la traversée du cas critique est telle qu'un point double instable donne naissance à un point double asymptotiquement stable, entouré d'une courbe (Γ) répulsive (instable).

- Bifurcations avec multiplicateurs réels [II-6]: $S_1 = \pm 1$, $|S_2| < 1$

Lorsque dans la récurrence (III-1) le paramètre μ varie de sorte qu'en un point double P, un multiplicateur $S_1(\mu)$ passe par la valeur $S_1(\mu_o) = +1$, on peut avoir l'apparition d'un nombre pair ou impair de points doubles alternativement stables et instables, (la parité du nombre de points dépendant de la forme de f et g).
Le passage d'un multiplicateur par la valeur - 1 peut donner naissance à des cycles d'ordre 2, qui se confondent avec P pour $\mu = \mu_o$.

Ces résultats permettent lors de l'analyse d'un système échantillonné non linéaire de prévoir certaines oscillations périodiques de basse fréquence, ainsi que des oscillations presque périodiques, en plus de celles obtenues par les méthodes classiques. En effet lorsqu'on considère une certaine oscillation (cycle d'ordre N pour la récurrence N = 2, 3, 4...) une bifurcation complexe peut donner naissance à des oscillations combinées autour de l'oscillation fondamentale, et une bifurcation réelle par passage à la valeur - 1 peut générer des cycles d'ordre 2N, c'est-à-dire dont la fréquence est divisée par deux par rapport à l'oscillation initiale.
Remarque : Dans l'annexe II nous donnons une méthode de démonstration de ces résultats basée sur les substitutions de CIGALA

III-3 - ETUDE DES OSCILLATIONS DANS UN SYSTEME ECHANTILLONNE NON LINEAIRE

III-3-1 - Présentation du système étudié

Nous nous proposons ici de mettre en évidence dans un cas concret les différentes formes d'oscillations que l'on peut obtenir, en utilisant notamment les résultats énoncés ci-dessus.
Le système étudié est identique à celui de la figure II-3, mais sans correction tachymétrique :

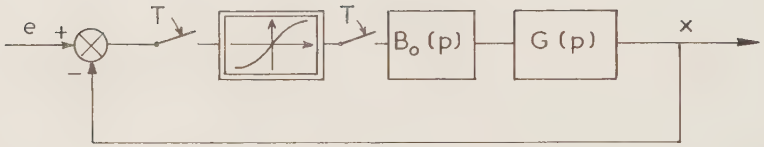


Figure III-1

La non linéarité choisie est à symétrie impaire, $f(-\varepsilon) = -f(\varepsilon)$ continue et univoque. L'élément dynamique est constitué d'un bloqueur d'ordre zéro, d'un intégrateur et d'une constante de temps τ. Par changement de variable et en incluant le gain K de l'intégrateur dans la non linéarité nous avons :

$$G(p) = \frac{1'}{p(P+1)}$$

Pour mener les calculs qui suivent nous avons choisi :

$$f(\varepsilon) = th(k\varepsilon)$$

qui représente une non linéarité de type saturation dont on peut faire varier la pente à l'origine à l'aide du paramètre k.

Le système de la figure III-1, pour une entrée e = 0 (système autonome) a son comportement décrit par la récurrence

$$(III\text{-}2) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + a\, y_n + b\, f(x_n) \\ y_{n+1} = c\, y_n - a\, f(x_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} c = e^{-T} \\ a = 1 - c \\ b = a - T \end{cases}$$

III-3-2 - Etude des points doubles

Les points doubles de la récurrence (III-2) sont donnés par

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \implies a\, y_n + b\, f(x_n) = 0 \\ y_{n+1} = y_n \implies a\, y_n + a\, f(x_n) = 0 \end{cases}$$

Comme nous avons b = a - T nous en déduisons que ces deux conditions ne peuvent être vérifiées que si

$$f(x_n) = 0 \quad \text{et} \quad y_n = 0$$

Compte tenu de la forme de la non linéarité choisie nous en déduisons :

$$x_n = y_n = 0$$

Il existe un seul point double pour la récurrence III-2. La nature de ce point double en fonction du paramètre k , pour T donné est représentée sur la figure II-4 (chapitre II) et nous déduisons de cette figure que lorsque k varie de 0 à l'infini, ce point singulier subit les bifurcations suivantes :

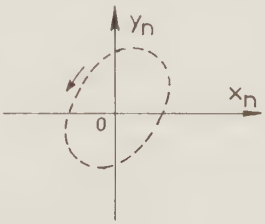
Pour $T > 3,72$: $k = 0 \rightarrow$ Noeud stable I $\rightarrow$ Foyer stable $\rightarrow$ Noeud stable 3 $\rightarrow$ $\rightarrow$ col 3 $\rightarrow$ $k = \infty$.

Pour $T \leq 3,72$: $k = 0 \rightarrow$ Noeud stable I $\rightarrow$ Foyer stable $\rightarrow$ Foyer instable $\rightarrow$ $\rightarrow$ Noeud 3 instable $\rightarrow$ Col 3 $\rightarrow$ $k = \infty$.

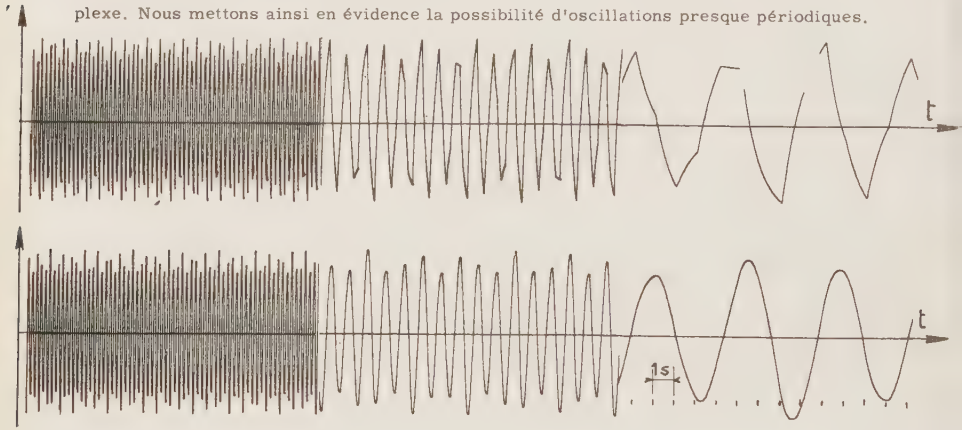
Nous voyons apparaître ici deux types de bifurcations : l'une correspondant à un cas critique complexe (foyer stable $\rightarrow$ foyer instable), l'autre au passage d'un multiplicateur par la valeur - 1 (Noeud 3 $\rightarrow$ col 3)

a) Analyse de la bifurcation avec multiplicateurs complexes ($T < 3,72$)

D'après les résultats de [II-8] nous avons ici un cas critique complexe stable ($G_1 < 0$) lorsqu'on se trouve en dehors des cas d'exception, et également stable lorsqu'on a un cas d'exception d'après les résultats du chapitre II.
La bifurcation foyer stable $\rightarrow$ foyer instable va donc donner naissance a une trajectoire discrète fermée entourant le point singulier (figure III-2)



Considérons à titre d'exemple le cas où T = 1 s. Pour k = 2,39 nous avons un cas critique avec multiplicateurs complexes. Par simulation du système sur calculatrice analogique, et pour une valeur de k égale à 2,7 nous obtenons un tel type de trajectoire discrète fermée entourant l'origine. Sur la figure III-3 nous avons reporté les enregistrements de X(t) et Y(t) correspondants. Nous obtenons une oscillation non périodique de forme complexe. Nous mettons ainsi en évidence la possibilité d'oscillations presque périodiques.



— Figure.III.3 —

b) Analyse de la bifurcation avec des mutliplicateurs réels

Le passage d'un multiplicateur par la valeur - 1 permet de prévoir l'apparition d'un cycle d'ordre 2, stable dans le cas où le deuxième multiplicateur a son module inférieur à 1 à la bifurcation ($T > 3,72$) instable dans le cas contraire ($T < 3,72$). Dans ce qui suit nous montrons l'existence de tels cycles.

Remarques : Pour T = 1 s (cas dont nous donnons certains résultats de simulation) nous avons les bifurcations suivantes, lorsque k varie de 0 à l'infini .

$$\begin{cases} k = 0 + \varepsilon & \text{Noeud stable type 1} \\ k = 0,1 + \varepsilon & \text{Foyer stable} \\ k = 2,39 + \varepsilon & \text{Foyer instable} \\ k = 15 + \varepsilon & \text{Noeud instable type 3} \\ k = 26,4 + \varepsilon & \text{Col type 3} \end{cases}$$

Pour k = 6, 1 l'argument des multiplicateurs est égal à $\frac{2\pi}{5}$ ce qui ne correspond pas à un cas d'exception compte tenu de la non linéarité choisie. Nous avons constaté expérimentalement que pour cette valeur de k il naît deux cycles d'ordre 5, l'un stable, l'autre instable. Bien que cette coincidence n'ait pu être expliquée nous pensons que cette apparition de cycles est due à un phénomène d'accrochage ou de synchronisation sur la période 5 T.

III-3-3 - Etude des cycles - Génération d'oscillations de basse fréquence

La conclusion b) ci-dessus nous amène à rechercher les conditions d'existence de cycles d'ordre 2. De plus dans ce système il est possible par les méthodes citées au début du chapitre de mettre en évidence des cycles d'ordre 4, 5, 6, etc... L'étude des bifurcations de ces différents cycles va nous permettre de mettre en évidence des oscillations très complexes, bien que nous n'ayons ici qu'un système d'ordre 2.

III-3-3-1 - Cycles d'ordre 2

Si ces cycles existent ils sont solutions de

$$\text{(III-3)} \quad \begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + a\, y_{n+1} + b\, f(x_{n+1}) = x_n \\ y_{n+2} = c\, y_{n+1} - a\, f(x_{n+1}) = y_n \end{cases}$$

Un résultat connu[III-12] sur la symétrie des oscillations de période NT avec N pair permet de poser

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n \\ y_{n+1} = -y_n \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x_{n+2} = -x_n - a\, y_n - b\, f(x_n) = x_n \\ y_{n+2} = -c\, y_n + a\, f(x_n) = y_n \end{cases}$$

dont la solution est donnée par :

$$\begin{cases} y_n = \frac{a}{1+c}\, f(x_n) \\ 2\, x_n = -\left(\frac{a^2}{1+c} + b\right) f(x_n) \end{cases}$$

soit

$$(III\text{-}4) \qquad f(x_n) = \frac{1}{\frac{T}{2} - th\left(\frac{T}{2}\right)} x_n = \alpha x_n$$

Cette relation montre qu'il existe un cycle d'ordre 2 si la droite de pente $\frac{1}{\frac{T}{2} - th\left(\frac{T}{2}\right)}$ coupe la courbe f(x) dans le plan f (x), x (figure III-4). Ce résultat est du même type que celui donné par TSYPKIN dans [III-1].

Comme nous avons $\frac{T}{2} > th\left(\frac{T}{2}\right)$ cette droite est située dans les 1er et 3ème quadrant et nous avons donc possibilité d'existence de cycle d'ordre 2.

Par exemple pour T = 1 s nous avons f(x) = 26,4 x c'est-à-dire que l'on aura uncycle d'ordre 2 pour k ≥ 26,4. Nous avons ici une confirmation des prévisions précédentes

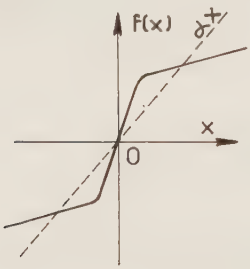
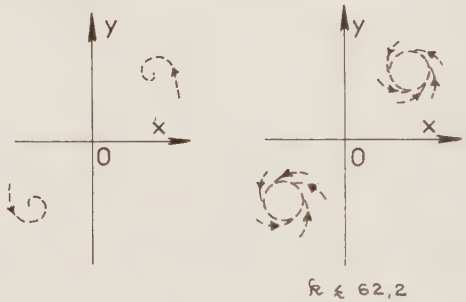


Figure III-4



Trajectoires discrètes avant et après bifurcation

Figure III-5

L'étude des multiplicateurs de la récurrence (III-3) lorsque k varie de 0 à l'infini donne les résultats suivants :

k = 0 + ε	Pas de cycle d'ordre 2
k = 26,4 + ε	Noeud instable de type 1
k = 34,1 + ε	Foyer instable
k = 62,2 + ε	Foyer stable
k = 100 + ε	Noeud stable de type 1

Nous constatons que lorsque k passe par la valeur 62,2 en diminuant nous avons une bifurcation foyer stable ⟶ foyer instable. La traversée de ce cas critique va donc donner une trajectoire fermée attractive autour de chaque point du cycle (figure III-5).

Le calcul de φ au cas d'exception nous donne une valeur voisine de $\frac{2\pi}{5}$ et chaque trajectoire discrète sera constituée de 5 points tournant autour de chaque point du cycle. Nous mettons là en évidence une oscillation de forme complexe constituée d'une oscillation de période 2T modulée par une oscillation presque périodique.

Pour vérifier ces résultats nous avons simulé le système sur calculatrice analogique avec une caractéristique non linéaire du type saturation à symétrie impaire (cf figure II-7), et en diminuant progressivement la pente à l'origine de f (x) nous avons cherché à rendre le cycle d'ordre 2 instable. Les enregistrements correspondant à la traversée du cas critique complexe sont donnés sur la figure III-6 :

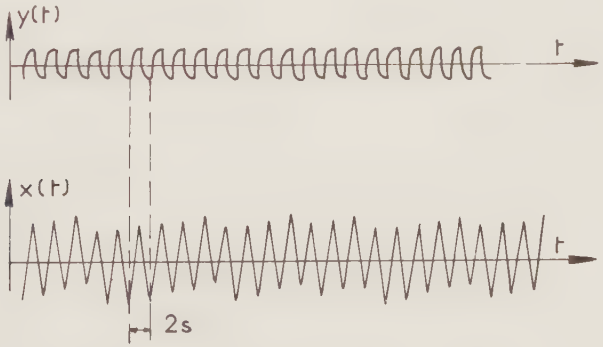


Figure III-6

L'observation de x(t) montre que l'on a une oscillation de période 2T modulée par un signal de basse fréquence. Les enregistrements ne nous permettent pas de savoir si ce signal modulant est périodique c'est-à-dire si sa fréquence est commensurable avec $\frac{1}{T}$.

III-3-3-2 - Recherche des cycles d'ordre supérieur à 2 et génération de cycles d'ordre élevé

La recherche de cycles d'ordre supérieur à 2 peut se traiter, comme nous l'avons dit au début de ce chapitre par différentes méthodes. Ces méthodes deviennent de plus en plus complexes au fur et à mesure que l'ordre N des cycles augmente. En vue de résoudre ce problème, d'une manière incomplète mais satisfaisante cependant nous proposons de procéder de la manière suivante :

1) faire une première exploration des cycles possibles pour N pas très élevé (N = 3, 4, 5, 6...)

2) étudier toutes les bifurcations possibles de ces cycles en fonction d'un paramètre. L'étude de ces bifurcations nous fournira d'une part la possibilité d'existence de cycles d'ordre 2N (passage d'un multiplicateur par la valeur - 1), ou bien de trajectoires discrètes fermées entourant les points d'un cycle (multiplicateurs complexes), d'autre part la position de ces cycles dans le plan y_n, x_n puisque par exemple dans le cas d'une bifurcation réelle ($S_1 = -1$) les cycles d'ordre 2N viennent se confondre avec le cycle initial d'ordre N au cas critique.

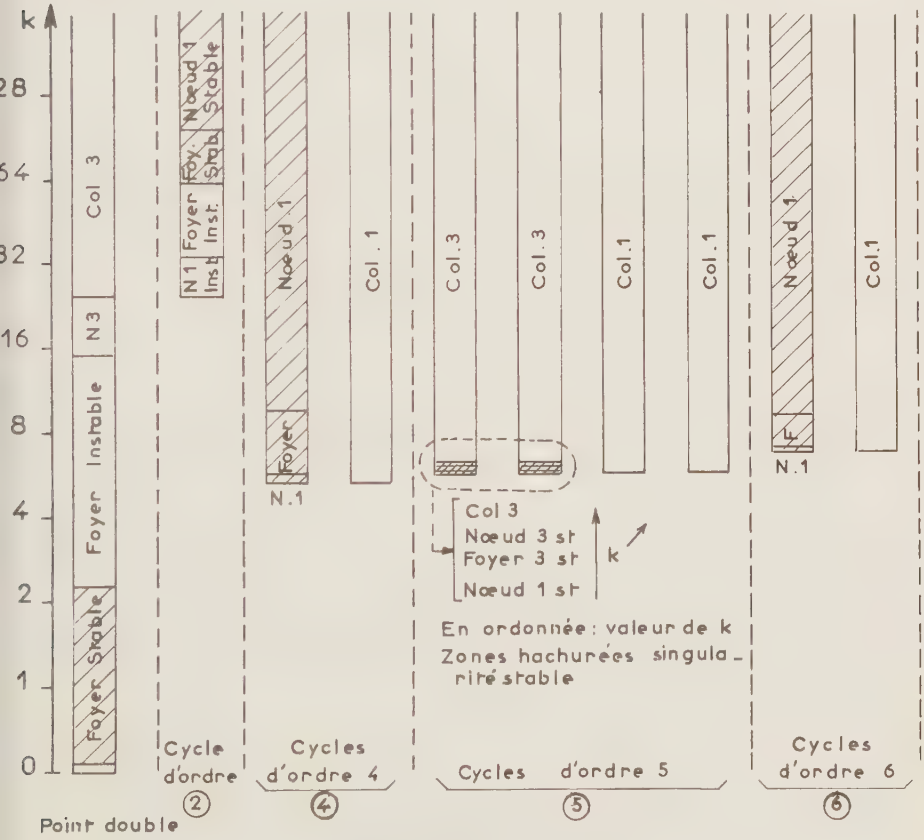
Pour la première étape nous avons utilisé les programmes de calcul mis au point au L.A.A.S. par GIRAUD[III-11]. Ces programmes consistent à rechercher les singularités qui peuvent entourer un point double (ou un cycle) par une méthode de gradient. Dans l'exemple ci-dessus une première exploration pour T = 1 s, k = 10 a permis de mettre en évidence des cycles : d'ordre 4 (1 cycle stable et 1 cycle instable)
d'ordre 5 (4 cycles symétriques deux à deux)
d'ordre 6 (1 cycle stable et 1 cycle instable symétriques).

Dans la deuxième étape nous avons étudié la variation des multiplicateurs de ces différents cycles en fonction du paramètre k. On arrive ainsi au schéma des bifurcations de la figure III-5.

Nous constatons sur cette figure que les deux cycles d'ordre cinq subissent une bifurcation Noeud 3 stable → col 3 lorsque k augmente. Ceci permet de prévoir l'existence de cycles d'ordre 10. Une recherche de ces cycles à l'aide des programmes déjà cités, en prenant comme conditions initiales x_n, y_n voisines des cycles d'ordre 5 pour k légèrement supérieur à la valeur de bifurcation permet de mettre en évidence 4 cycles d'ordre 10. Deux de ces cycles sont toujours des cols de type 1. Les deux autres ont leurs multiplica-

teurs qui varient en fonction de k de telle manière que l'on met en évidence une nouvelle bifurcation. Noeud 3_stable _ col 3, d'où la possibilité de cycles d'ordre 20.

Une étude des bifurcations de ces derniers cycles aboutit à la détermination de cycles d'ordre 40 (figure III-6).



_ Figure.III.5 _

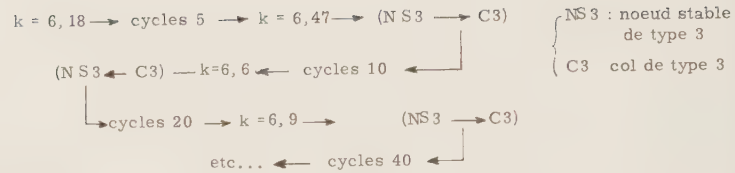


Figure III-6

Remarques: Nous n'avons donné ici que les résultats des calculs concernant les bifurcations des cycles d'ordre 5. Nous avons cependant effectué d'autres calculs qui nous ont donné les résultats suivants :

4 cycles d'ordre 9 dont 2 donnent une bifurcation

NS3 → C3 donc la possibilité d'existence de cycles d'ordre 18

2 cycles d'ordre 14 dont 1 donne une bifurcation

NS1 → C1 c'est-à-dire la possibilité d'autres cycles d'ordre 14.

Lorsque k tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque la caractéristique non linéaire se rapproche d'un relais idéal les seuls cycles stables qui existent sont des cycles d'ordre 2, 4 et 6. Ce résultat correspond à celui donné par TSYPKIN [III-13] pour le même système avec un relais comme non linéarité.

Les trajectoires continues dans le plan de phase y, x correspondant aux différents cycles rencontrés possèdent des formes simples pour $N \leq 6$ et complexes pour $N > 6$ (figure III-7). Si on considère le rayon vecteur $\rho e^{j\theta}$ avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{arc tg } \frac{x}{y}$ on constate que pour $N \leq 6$ ce rayon vecteur n'effectue qu'une seule rotation 2π lorsqu'on décrit le cycle, alors qu'il effectue plusieurs rotations pour $N > 6$.

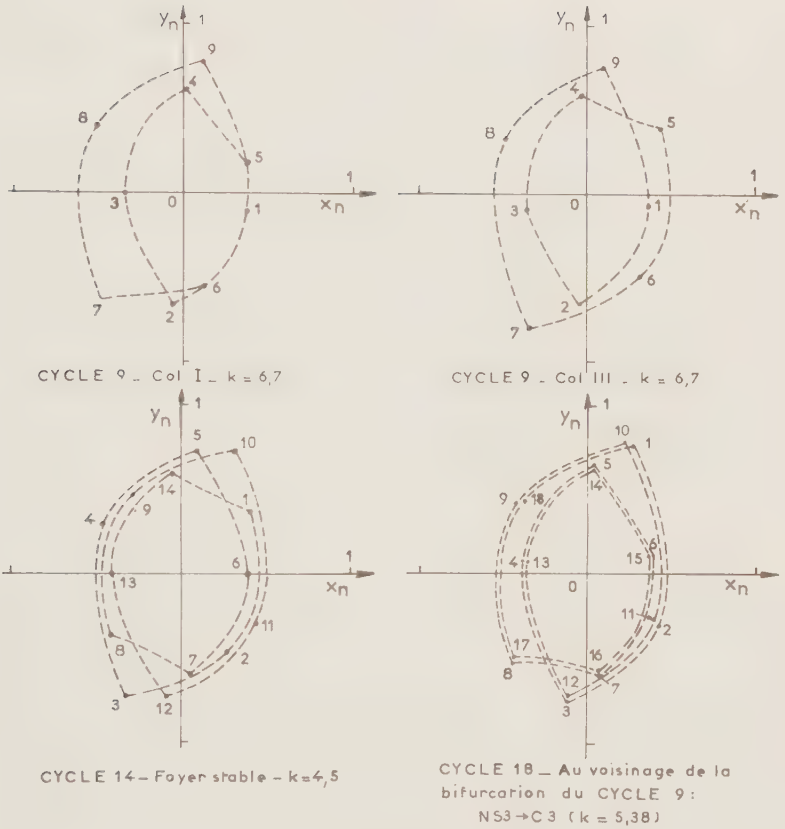


Figure III-7

III-4 - CONCLUSIONS

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode permettant de mettre en évidence dans un système échantillonné non linéaire des cycles d'ordre élevé (oscillations de basse fréquence) ainsi que des oscillations presque périodiques.

Bien que limitée aux récurrences d'ordre 2 nous devons insister sur les possibilités d'une telle méthode comparativement à celles citées au début de ce chapitre. En effet les méthodes [III-1 à III-9] deviennent rapidement complexes au fur et à mesure que l'ordre des cycles augmente et même inutilisables pour des cycles d'ordre très élevé .

L'étude d'un exemple, déjà très analysé dans toute la littérature citée, nous a permis de

mettre en évidence un très grand nombre de cycles stables ou instables, ce qui montre que le fait d'introduire un échantillonnage dans un système considéré comme très simple peut donner lieu à des phénomènes extrémement complexes.

L'analyse des bifurcations des points singuliers d'une récurrence d'ordre 2, à partir des résultats théoriques obtenus par MIRA et coll [op. cités] et notamment l'étude de la traversée des cas critiques correspondants rend possible la détermination des oscillations basse fréquence et des oscillations presque périodiques, et s'avère donc comme une méthode simple et puissante pour traiter de tels problèmes.

Nous avons passé sous silence dans ce chapitre certaines propriétés des cycles obtenus (symétries, nombre de rotations du rayon vecteur $\rho e^{j\theta}$ dans le plan de phase y, x , nombre de points anguleux de ces trajectoires, cycles obtenus pour k tendant vers l'infini, etc...) car en fait ces propriétés sont trop liées à la forme particulière de G(p) que nous avons choisie ($G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$) ainsi qu'à la forme de la caractéristique non linéaire, et ne peuvent donc être généralisées.

CONCLUSION

L'analyse, à l'aide des récurrences associées, de systèmes de commande à données échantillonnées, permet la mise en évidence de propriétés particulières de certains systèmes, ainsi que l'explication de phénomènes complexes rencontrés lors du fonctionnement de tels systèmes.

En nous basant sur les résultats des travaux de l'équipe "Mécanique non Linéaire" du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales, en particulier à partir de l'analyse des propriétés d'une récurrence d'ordre deux à variables réelles, nous avons présenté dans ce mémoire trois types de résultats donnant une meilleure connaissance des phénomènes que l'on peut observer.

En premier lieu, par la description d'un système du deuxième ordre, avec durée d'échantillonnage non nulle, à l'aide d'équations aux récurrences, nous avons étudié les conditions de stabilité en fonction des paramètres T, période d'échantillonnage, h durée d'échantillonnage et K le gain de la partie continue du système.

Dans le plan des paramètres $\gamma = \frac{h}{T}$, K, nous avons mis en évidence la présence de plusieurs domaines de stabilité. Ce phénomène a des conséquences sur le choix d'une valeur du gain K, pour γ donné, en vue d'améliorer la forme et la durée du régime transitoire et la précision en régime permanent lorsque le système est soumis à certains signaux d'entrée.
En reprenant une méthode d'analyse approchée de tels systèmes nous suggérons un dispositif d'échantillonnage particulier (impulsion idéale, réglable en position entre deux instants d'échantillonnage périodique) susceptible d'améliorer les performances d'un asservissement échantillonné d'une manière plus simple qu'un réseau correcteur pulsé classique.

Dans la deuxième partie de notre mémoire nous avons étudié, pour un système échantillonné avec non linéarité essentielle, certains "cas d'exception" aux conditions de stabilité d'un état stationnaire. En dehors de certains cas critiques, les conditions de stabilité locale d'une position d'équilibre peuvent se déduire de l'approximation linéaire de la récurrence associée au système. En considérant le cas critique relatif à deux multiplicateurs complexes conjugués de module unité, et lorsque φ l'argument de ces multiplicateurs est commensurable avec 2π , on met en évidence des "cas d'exception" , en ce sens qu'il n'est plus possible de conclure sur les conditions de stabilité de la singularité au cas critique par des méthodes classiques telle que par exemple l'utilisation d'une fonction de Liapunov.

L'analyse des cas d'exception que nous faisons, en particulier pour $\varphi = \frac{2k\pi}{3}$ et $\varphi = \frac{2k\pi}{4}$, nous permet de conclure à la présence, dans certaines conditions, de points singuliers de type hyperbolique. Pour l'asservissement échantillonné non linéaire du 2ème ordre étudié nous en concluons la possibilité d'un phénomène de résonance paramétrique non linéaire, phénomène qui ne peut pas se produire pour le même système sans échantillonnage.

Dans l'exemple traité c'est essentiellement la forme de la non linéarité qui joue un rôle pour l'obtention ou non de trajectoires hyperboliques autour du point singulier. C'est un fait à retenir lors de la synthèse de tels systèmes, notamment lorsqu'il s'agit d'éviter un phénomène de résonance.

Enfin, la troisième partie de notre étude, concerne la détermination de certains types d'oscillations complexes (oscillations de basse fréquence, oscillations presque périodiques, oscillations combinées) dans un asservissement non linéaire du 2ème ordre avec échantillonnage d'erreur.
L'étude de telles oscillations ne peut se faire à partir des méthodes classiques comme par exemple la recherche des solutions de l'équation $x_{n+N} = x_n$.
En nous basant sur l'étude des bifurcations de certains états stationnaires (points doubles, cycles) nous donnons les moyens de mettre en évidence des oscillations presque périodiques, des oscillations combinées et des oscillations basse fréquence. En particulier la traversée du cas critique correspondant à deux multiplicateurs complexes conjugués explique l'apparition d'une oscillation presque périodique autour du point singulier étudié, et la traversée du cas critique tel que l'un des multiplicateurs passe par la valeur - 1 suggère l'existence d'un cycle d'ordre 2N lorsqu'on étudie un cycle d'ordre N.

Ces différents résultats font apparaître l'intérêt de l'étude des systèmes à données échantillonnées à partir des récurrences associées. Pour les problèmes de synthèse notamment il est important de connaître, en plus des conditions de stabilité, les phénomènes complexes qui peuvent naître dans un tel système : résonances et oscillations de forme complexe

Notre travail, essentiellement consacré à la mise en évidence dans un cas concret, de phénomènes déduits de l'étude théorique des récurrences, fait apparaître certains points particuliers méritant d'être développés :

- d'un point de vue pratique il y a lieu de rechercher, pour les systèmes à durée d'échantillonnage non nulle, une formulation ou au moins une présentation des résultats plus accessible et étendue à des systèmes d'ordre supérieur à deux ;

- en ce qui concerne les asservissements échantillonnés avec non linéarité essentielle, certaines propriétés des récurrences actuellement à l'étude (zones dans lesquelles il existe une accumulation de points, traversée d'un cas d'exception, système d'ordre supérieur à deux...) doivent permettre l'explication des phénomènes complexes que l'on observe dans certaines conditions, et ainsi lors de la synthèse de les éliminer s'ils sont nuisibles ou de les amplifier s'ils sont favorables.

ANNEXE 1

DETERMINATION DES COEFFICIENTS C_{ip}, CALCUL DE G_2 ET ANALYSE DE CERTAINS CAS D'EXCEPTION

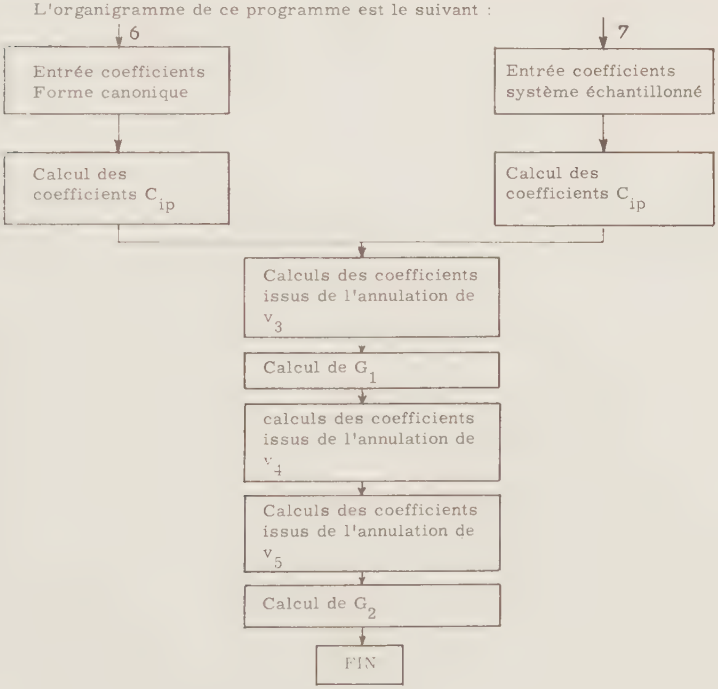
Dans cette annexe nous donnons les programmes permettant :

1) de calculer G_1 et G_2 pour un système décrit par une récurrence non linéaire d'ordre 2, calcul effectué soit à partir de la récurrence mise sous forme canonique (cf [II-8]) soit à partir des équations du système échantillonné étudié au chapitre II.

2) de déterminer l'allure des trajectoires au voisinage d'un point singulier lorsque l'on a un cas d'exception avec $\varphi = \frac{2\pi}{4}$ et $G_1 = 0$

PROGRAMME N° 1 - CALCUL DE G_1 ET G_2 POUR UN CAS CRITIQUE COMPLEXE

L'organigramme de ce programme est le suivant :



A-1-1 - Calculs à partir de la forme canonique d'une récurrence d'ordre 2

La forme initiale de la récurrence est :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n \cos\varphi - s_n \sin\varphi + \sum_{m=2}^{5} R_m (r_n, s_n) \\ s_{n+1} = r_n \sin\varphi + s_n \cos\varphi + \sum_{m=2}^{5} S_m (r_n, s_n) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} R_2 (r, s) = Ar^2 + Brs + Cs^2 \\ S_2 (r, s) = A'r^2 + B'rs + C's^2 \text{ et ainsi de suite} \end{cases}$$

jusqu'à

$$\begin{cases} R_5 (r, s) = Mr^5 + Nr^4s + O\, r^3s^2 + Pr^2s^3 + Qrs^4 + R\, s^5 \\ S_5 (r, s) = M'r^5 + N'r^4s + O'r^3s^2 + P'r^2s^3 + Q'r\, s^4 + R's^5 \end{cases}$$

Dans le programme A', B', ... Q', S' sont notés AP, BP, ... QP, RP

A-I-2 - Calculs à partir des équations du système échantillonné non linéaire étudié dans le chapitre II

La récurrence initiale est :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + a\, Y_n - b\, f (-x_n - g (Y_n)) \\ Y_{n+1} = c\, Y_N + a\, f (- x_n - g (Y_n)) \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \text{Exp } (-T) \\ a = 1 - T \\ b = a - T \end{cases}$$

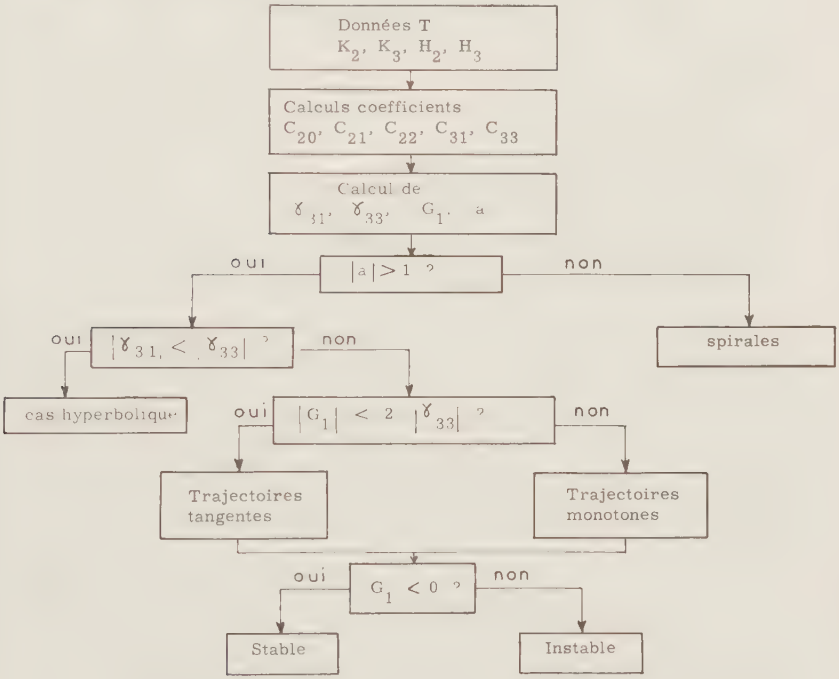
avec

$$f[- x_n - g (Y_n)] = \sum_{i=1}^{5} k_i (X_n + \sum_{j=1}^{5} h_j Y_n^j)^i$$

Dans ce deuxième cas les données sont T la période d'échantillonnage et k_i, h_j paramètres de la non linéarité.

A-II - PROGRAMME N 2 - ANALYSE DU CAS D'EXCEPTION A $\varphi = \frac{2\pi}{4}$

Ce programme, basé sur les équations du système étudié dans le deuxième chapitre est un programme de test permettant de savoir si certaines inégalités de II-2-2 sont vérifiées. Son organigramme est le suivant :



```
      REAL K1,K2,K3,K4,K5,H1,H2,H3,H4,H5
      REAL NN4,NN5
      REAL I,J,K,L,M,N,IP,JP,KP,LP,MP,NP
      COMPLEX C1,C2,C3,R1,R2,E1,C20,C21,C22,C30,C31,C32,C33,C40,C41,C42,
     1   C43,C44,C50,C51,C52,C53,C54,C55
      COMPLEX L1,L2,L3,M1,M2,M3,M4,N1,N2,N3,N4,N5,P1,P2,P3,P4,P5,P6,
     1        L1S,L2S,L3S,M1S,M2S,M3S,N4S,N1S,N2S,N3S,N4S,N5S,
     2        P1S,P2S,P3S,P4S,P5S,P6S,U1,U2,U3,U4,U5,U1S,U2S,U3S,U4S,U5S
      COMPLEX A13,A23,A33,A43,A14,A24,G1,A44,A54,A15,A25,A35,A45,A55,
     1        A65,G21,G22,G23,G2
      COMPLEX CMPLX,CONJG
C
    5 READ(5,510)NAT
  510 FORMAT(I1)
      IF(NAT-1)6,7,8
C
    6 READ(5,10)A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R
      READ(5,10)AP,BP,CP,DP,EP,FP,GP,HP,IP,JP,KP,LP,MP,NP,OP,QP,RP
   10 FORMAT(5F10.4/4F10.4/5F10.4/6F10.4)
      WRITE(6,15)A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R
   15 FORMAT(1H1,2X,2HA=,F10.4,5X,2HB=,F10.4,5X,2HC=,F10.4,5X,2HD=,F10.4
     1   ,5X,2HE=,F10.4,5X,2HF=,F10.4,5X,2HG=,F10.4/2X,2HH=,F10.4,5X,
     2   2HI=,F10.4,5X,2HJ=,F10.4,5X,2HK=,F10.4,5X,2HL=,F10.4,5X,2HM=,
     3   F10.4,5X,2HN=,F10.4/2X,2HO=,F10.4,5X,2HP=,F10.4,5X,2HQ=,F10.4,
     4   5X,2HR=,F10.4///)
      WRITE(6,16)AP,BP,CP,DP,EP,FP,GP,HP,IP,JP,KP,LP,MP,NP,OP,PP,QP,RP
   16 FORMAT(2X,3HAP=,F10.4,5X,3HBP=,F10.4,5X,3HCP=,F10.4,5X,3HDP=,
     1   F10.4,5X,3HEP=,F10.4,5X,3HFP=,F10.4/2X,3HGP=,F10.4,5X,3HHP=,
     2   F10.4,5X,3HIP=,F10.4,5X,3HJP=,F10.4,5X,3HKP=,F10.4,5X,3HLP=,
     3   F10.4,5X,3HMP=,F10.4/2X,3HNP=,F10.4,5X,3HOP=,F10.4,5X,3HPP=,
     4   F10.4,5X,3HQP=,F10.4,5X,3HRP=,F10.4////)
      READ(5,20)PHID
   20 FORMAT(F10.4)
      WRITE(6,17)PHID
   17 FORMAT(20X,4HPHI=,F10.4////)
      PHI=3.141593*PHID/180.
C
      L1=0.25*CMPLX(A+BP-C,AP-B-CP)
      L2=0.5*CMPLX(A+C,AP+CP)
      L3=0.25*CMPLX(A-BP-C,AP+B-CP)
C
      M1=0.125*CMPLX(D*EP-F-GP,DP-E-FP+G)
      M2=0.125*CMPLX(3.*D+EP+F+3.*GP,3.*DP-E+FP-3.*G)
      M3=0.125*CMPLX(3.*D-EP+F-3.*GP,3.*DP+E+FP+3.*G)
      M4=0.125*CMPLX(D-EP-F+GP,DP+E-FP-G)
C
      N1=0.0625*CMPLX(H-J+L+IP-KP,-I+K+HP-JP+LP)
      N2=0.0625*CMPLX(4.*H-4.*L+2.*IP+2.*KP,-2.*I-2.*K+4.*HP-4.*LP)
      N3=0.0625*CMPLX(6.*(H+L)+2.*J,6.*(HP+LP)+2.*JP)
      N4=0.0625*CMPLX(4.*(H-L)-2.*(IP+KP),2.*(I+K)+4.*(HP-LP))
      N5=0.0625*CMPLX(H-J+L-IP+KP,I-K+HP-JP+LP)
C
      P1=0.03125*CMPLX(M-O+Q+NP-PP+RP,-N+P-R+MP-OP+QP)
      P2=0.03125*CMPLX(5.*M-O-3.*Q+3.*NP+PP-5.*RP,-3.*N-P+5.*R+5.*MP-OP
     1-3.*QP)
      P3=0.0625*CMPLX(5.*M+O+Q+NP+PP+5.*RP,-N-P-5.*R+5.*MP+OP+QP)
      P4=0.0625*CMPLX(5.*M+O+Q-MP-PP-5.*RP,N+P+5.*R+5.*MP+OP+QP)
      P5=0.03125*CMPLX(5.*M-O-3.*Q-3.*NP-PP+5.*RP,3.*N+P-5.*R+5.*MP-OP
     1-3.*QP)
      P6=0.03125*CMPLX(M-O+Q-NP+PP-RP,N-P+R+MP-OP+QP)
      GO TO 9
C
    7 READ(5,500)T
  500 FORMAT(F10.6)
      READ(5,501)K1,K2,K3,K4,K5,H1,H2,H3,H4,H5
  501 FORMAT(5F10.5/5F10.5)
      WRITE(6,18)T,K1,K2,K3,K4,K5,H1,H2,H3,H4,H5
   18 FORMAT(1H1,2X,2HT=,F10.6,7X,2HK1,9X,2HK2,9X,2HK3,9X,2HK4,9X,
     19X,2HK5/3X,5(F10.5,2X)//7X,2HH1,9X,2HH2,9X,2HH3,9X,2HH4,9X,2HH5/
     23X,5(F10.5,2X)//)
C
      C=EXP(-T)
      A=1.-C
      B=A-T
C
      CPHI=0.5*(2.+A*K1*T)
      SPHI=0.5*SQRT(4.-(2.+A*K1*T)**2)
C
      IF(CPHI)1,2,2
    1 PHI=ATAN(SPHI/CPHI)+3.141593
      GO TO 3
    2 PHI=ATAN(SPHI/CPHI)
```

```
      3 PHID=PHI*180./3.141593
C
        S1=0.5*CMPLX(2.+A*K1*T,SQRT(4.-(2.+A*K1*T)**2))
C
        S2=CONJG(S1)
C
C
        R1=(S1-1.+B*K1)/(A-B*K1*H1)
C
        R2=CONJG(R1)
C
        F1=(B*R2+A)/(R1-R2)
C
C
        AA2=K2
        BB2=2.*K2*H1
        CC2=K1*H2+K2*H1**2
C
        C20=(AA2+BB2*R1+CC2*R1**2)*F1
        C21=0.5*(2.*AA2+BB2*(R1+R2)+2.*CC2*R1*R2)*F1
        C22=(AA2+BB2*R2+CC2*R2**2)*F1
C
C
        AA3=K3
        BB3=3.*K3*H1
        CC3=2.*K2*H2+3.*K3*H1**2
        DD3=K1*H3+2.*K2*H1*H2+K3*H1**3
C
        C30=(AA3+BB3*R1+CC3*R1**2+DD3*R1**3)*F1
        C31=(3.*AA3+BB3*(2.*R1+R2)+CC3*R1*(2.*R2+R1)+3.*DD3*R1**2*R2)*F1
     1    /3.
        C32=(3.*AA3+BB3*(R1+2.*R2)+CC3*R2*(2.*R1+R2)+3.*DD3*R1*R2**2)*F1
     1    /3.
        C33=(AA3+BB3*R2+CC3*R2**2+DD3*R2**3)*F1
C
C
        AA4=K4
        BB4=4.*K4*H1
        CC4=3.*K3*H2+6.*K4*H1**2
        DD4=2.*K2*H3+6.*K3*H1*H2+4.*K4*H1**3
        NN4=K1*H4+K2*(H2**2+2.*H1*H3)+3.*K3*H1**2*H2+K4*H1**4
C
        C40=(AA4+BB4*R1+CC4*R1**2+DD4*R1**3+NN4*R1**4)*F1
        C41=0.25*(4.*AA4+BB4*(3.*R1+R2)+CC4*2.*(R1**2+R1*R2)+DD4*R1**2*
     1     (3.*R2+R1)+NN4*4.*R1**3*R2)*F1
        C42=(6.*AA4+3.*BB4*(R1+R2)+CC4*(R1**2+R2**2+4.*R1*R2)+DD4*3.*R1
     1    *R2*(R1+R2)+NN4*6.*R1**2*R2**2)*F1/6.
        C43=(4.*AA4+BB4*(R1+3.*R2)+CC4*2.*R2*(R1+R2)+DD4*R2**2*(3.*R1+R2)
     1    +NN4*4.*R1*R2**3)*F1/4.
        C44=(AA4+BB4*R2+CC4*R2**2+DD4*R2**3+NN4*R2**4)*F1
C
C
        AA5=K5
        BB5=5.*K5*H1
        CC5=4.*K4*H2+10.*K5*H1**2
        DD5=12.*K4*H1*H2+10.*K5*H1**3
        NN5=2.*K2*H4+3.*(2.*H1*H3+H2**2)*K3+12.*K4*H1**2*H2+5.*K5*H1**4
        VV5=K1*H5+2.*K2*H5*(H1+H2)+3.*K3*H1*(H1*H3+H2**2)+4.*K4*H1**3*H2
     1    +K5*H1**5
C
        C50=(AA5+BB5*R1+CC5*R1**2+DD5*R1**3+NN5*R1**4+VV5*R1**5)*F1
        C51=(5.*AA5+BB5*(4.*R1+R2)+CC5*R1*(3.*R1+2.*R2)+DD5*R1**2*(3.*R2
     1    +2.*R1)+NN5*R1**3*(R1+4.*R2)+5.*VV5*R1**4*R2)*F1/5.
        C52=(10.*AA5+2.*BB5*(3.*R1+2.*R2)+CC5*(R2**2+6.*R1*R2+3.*R1**2)
     1    +DD5*R1*(R1**2+6.*R1*R2+3.*R2**2)+NN5*R1**2*R2*(4.*R1+6.*R2)
     2    +10.*VV5*R1**3*R2**2)*F1/10.
        C53=(10.*AA5+2.*BB5*(3.*R2+2.*R1)+CC5*(R1**2+6.*R1*R2+3.*R2**2)
     1    +DD5*R2*(R2**2+6.*R1*R2+3.*R1**2)+NN5*R1*R2**2*(4.*R2+6.*R1)
     2    +10.*VV5*R1**2*R2**3)*F1/10.
        C54=(5.*AA5+BB5*(R1+4.*R2)+CC5*R2*(2.*R1+3.*R2)+DD5*R2**2*(2.*R2+
     1    3.*R1)+NN5*R2**3*(R2+4.*R1)+5.*VV5*R1*R2**4)*F1/5.
        C55=(AA5+BB5*R2+CC5*R2**2+DD5*R2**3+NN5*R2**4+VV5*R2**5)*F1
C
C
        L1=C20
        L2=2.*C21
        L3=C22
C
        M1=C30
        M2=3.*C31
        M3=3.*C32
```

```
      M4=C33
C
      N1=C40
      N2=4.*C41
      N3=6.*C42
      N4=4.*C43
      N5=C44
C
      P1=C50
      P2=5.*C51
      P3=10.*C52
      P4=10.*C53
      P5=5.*C54
      P6=C55
C
C
    9 L1S=CONJG(L1)
      L2S=CONJG(L2)
      L3S=CONJG(L3)
C
      M1S=CONJG(M1)
      M2S=CONJG(M2)
      M3S=CONJG(M3)
      M4S=CONJG(M4)
C
      N1S=CONJG(N1)
      N2S=CONJG(N2)
      N3S=CONJG(N3)
      N4S=CONJG(N4)
      N5S=CONJG(N5)
C
      P1S=CONJG(P1)
      P2S=CONJG(P2)
      P3S=CONJG(P3)
      P5S=CONJG(P5)
      P4S=CONJG(P4)
      P6S=CONJG(P6)
C
      U1=CMPLX(COS(PHI),SIN(PHI))
      U2=CMPLX(COS(2.*PHI),SIN(2.*PHI))
      U3=CMPLX(COS(3.*PHI),SIN(3.*PHI))
      U4=CMPLX(COS(4.*PHI),SIN(4.*PHI))
      U5=CMPLX(COS(5.*PHI),SIN(5.*PHI))
C
      U1S=CONJG(U1)
      U2S=CONJG(U2)
      U3S=CONJG(U3)
      U4S=CONJG(U4)
      U5S=CONJG(U5)
C
C     CALCUL DES COEFFICIENTS ISSUS DE L'ANNULATION DE V3

      A13=L3S*U1/(1.-U3)
      A23=(L2S*U1+L1*U1S)/(1.-U1)
      A33=(L1S*U1+L2*U1S)/(1.-U1S)
      A43=L3*U1S/(1.-U3S)
      WRITE(6,30)A13,A23,A33,A43
   30 FORMAT(22X,13HPARTIE REELLE,5X,17HPARTIE IMAGINAIRE//10X,4HA13=,
     1     8X,F10.4,9X,F10.4/10X,4HA23=,8X,F10.4,9X,F10.4/10X,4HA33=,8X,
     2     F10.4,9X,F10.4/10X,4HA43=,8X,F10.4,9X,F10.4//)
C
C     CALCUL DES COEFFICIENTS ISSUS DE L'ANNULATION DE V4
C
C                          CALCUL  DE  G1

      A14=(M4S*U1+L1*L3S+A13*3.*L1*U2+A23*L3S*U2)/(1.-U4)
      A24=(M3S*U1+M1*U1S+L1*L2S+L2*L3S+A13*3.*L2*U2+A23*(L2S*U2+2.*L1)
     1     +A33*2.*L3S)/(1.-U2)
      G1=M2S*U1+M2*U1S+L1*L1S+L2*L2S+L3*L3S+A13*3.*L3*U2
     1   +A23*(L1S*U2+2.*L2)+A33*(2.*L2S+L1*U2S)+A43*3.*L3S*U2S
      A44=(M1S*U1+M3*U1S+L1S*L2+L2S*L3+A23*2.*L3+A33*(2.*L1S+L2*U2S)
     1     +A43*3.*L2S*U2S)/(1.-U2S)
      A54=(M4*U1S+L1S*L3+A33*L3*U2S+A43*3.*L1S*U2S)/(1.-U4S)
      WRITE(6,40)A14,A24,A44,A54,G1
   40 FORMAT(10X,4HA14=,8X,F10.4,9X,F10.4/10X,4HA24=,8X,F10.4,9X,F10.4/
     1      10X,4HA44=,8X,F10.4,9X,F10.4/10X,4HA54=,8X,F10.4,9X,F10.4/
     2      10X,3HG1=,9X,F10.4,9X,F10.4/)
C
C     CALCUL DES COEFFICIENTS ISSUS DE L'ANNULATION DE V5
C
      A15=(N5S*U1+L1*M4S*L3S*M1+A13*3.*(M1*U2+L1**2*U1)
```

```
     1     +A23*(M4S*U2+2.*L1*L3*SU1)+A33*L3S**2*U1
     2     +A14*4.*L1*U3+A24*L3S*U3)/(1.-U5)
C
      A25=(N4S*U1+N1*U1S+L1*M3S+L2*M4S+L3S*M2+L2S*M1
     1     +A13*(3.*M2*U2+6.*L1*L2*U1)
     2     +A23*(2.*M1+L1**2*U1S+M3S*U2+2.*(L1*L2S+L2*L3S)*U1)
     3     +A33*2.*(M4S+L2S*L3S*U1+L1*L3S*U1S)
     4     +A43*3.*L3S**2*U1S
     5     +A14*4.*L2*U3+A24*(3.*L1*U1+L2S*U3))/(1.-U3)
C
      A35=(N3S*U1+N2*U1S+L1*M2S+L3*M4S+L2*M3S+L1S*M1+L2S*M2+L3S*M3
     1     +A13*3.*(M3*U2+(L2**2+2.*L3*L1)*U1)
     2     +A23*(2.*M2+2.*L1*L2*U1S+M2S*U2+2.*(L1*L1S+L2*L2S+L3*L3S)*U1)
     3+A33*(2.*M3S+(L2S**2+2.*L1S*L3S)*U1+M1*U2S+2.*(L1*L2S+L2*L3S)*U1S)
     4     +A43*3.*(M4S*U2S+2.*L3S*L2S*U1S)
     5  +A14*4.*L3*U3+A24*(3.*L2*U1+L1S*U3)+A44*3.*L3S*U1S)/(1.-U1)
C
      A45=(N2S*U1+N3*U1S+L1*M1S+L2*M2S+L3*M3S+L1S*M2+L2S*M3+L3S*M4
     1     +A13*3.*(M4*U2+2.*L3*L2*U1)
     2  +A23*(2.*M3+(L2**2+2.*L3*L1)*U1S+M1S*U2+2.*(L2*L1S+L3*L2S)*U1)
     3  +A33*(2.*M2S+2.*L1S*L2S*U1+M2*U2S+2.*(L1*L1S+L2*L2S+L3*L3S)*U1S)
     4  +A43*3.*(M3S*U2S+(L2S**2+2.*L1S*L3S)*U1S)
     5  +A24*3.*L3*U1+A44*(3.*L2S*U1S+L1*U3S)+A54*4.*L3S*U3S)/(1.-U1S)
C
      A55=(N1S*U1+N4*U1S+L2*M1S+L3*M2S+L1S*M3+L2S*M4
     1  +A13*3.*L3**2*U1
     2  +A23*2.*(M4+L2*L3*U1S+L3*L1S*U1)
     3  +A33*(2.*M1S+L1S**2*U1+M3*U2S+2.*(L2*L1S+L3*L2S)*U1S)
     4  +A43*3.*(M2S*U2S+2.*L1S*L2S*U1S)
     5  +A44*(3.*L1S*U1S+L2*U3S)+A54*4.*L2S*U3S)/(1.-U3S)
C
      A65=(N5*U1S+L3*M1S+L1S*M4
     1  +A23*L3**2*U1S+A33*(M4*U2S+2.*L3*L1S*U1S)
     2  +A43*3.*(M1S*U2S*L1S**2*U1S)+A44*L3*U3S+A54*4.*L1S*U3S)/(1.-U5S)
      WRITE(6,50)A15,A25,A35,A45,A55,A65
   50 FORMAT(10X,4HA15=,8X,F10.4,9X,F10.4/10X,4HA25=,8X,F10.4,9X,F10.4/
     1 10X,4HA35=,8X,F10.4,9X,F10.4/10X,4HA45=,8X,F10.4,9X,F10.4/,
     2 10X,4HA55=,8X,F10.4,9X,F10.4/10X,4HA65=,8X,F10.4,9X,F10.4)
C
C                         CALCUL  DE  G2
C
      G21=P3S*U1+P3*U1S+M1*M1S+M2*M2S+M3*M3S+M4*M4S+L1*N2S+L2*N3S+L3*N4S
     1     +L1S*N2+L2S*N3+L3S*N4+A13*(3.*N4*U2+6.*(L1*M4+L2*M3+L3*M2)*U1
     2     +6.*L1*L2*L3+L2**3)+A23*(2.*N3+2.*(L1*M3+L2*M2+L3*M1)*U1S
     3     +N2S*U2+2.*(L1*M1S+L2*M2S+L3*M3S)*U1+2.*(L3S*M4+L2S*M3+L1S*M2)
     4     *U1+2.*L2*L3*L3S+2.*L1*L3*L2S+2.*L1*L2*L1S*L2S*L2**2)
C
      G22=A33*(2.*N3S+2.*(L3S*M1S+L2S*M2S+L1S*M3S)*U1+N2*U2S
     1     +2.*(L1*M2S+L2*M3S+L3*M4S)*U1S+2.*(L3S*M3+L2S*M2+L1S*M1)*U1S
     2     +2.*(L1*L1S*L2S+L2*L1S*L3S+L2S*L3*L3S)+L2*L2S**2)
     3     +A43*(3.*N4S*U2S+6.*(L3S*M2S+L2S*M3S+L1S*M4S)*U1S+6.*L1S*L2S
     4     *L3S+L2S**3)
C
      G23=A14*4.*(M4*U3+3.*L2*L3*U2)+A24*(3.*M3*U1+3.*(L2**2+2.*L1*L3)
     1   *M1S*U3+3.*(L2*L1S+L3*L2S)*U2)+A44*(3.*M3S*U1S+3.*(L2S**2+2.*
     2   L3S*L1S)+M1*U3S+3.*(L1*L2S+L2*L3S)*U2S)+A54*4.*(M4S*U3S+3.*L2S
     3   *L3S*U2S)*A25*4.*L3*U2+A35*(2.*L1S*U2+3.*L2)+A45*(2.*L1*U2S
     4   +3.*L2S)+A55*4.*L3S*U2S
C
      G2=G21+G22+G23
      WRITE(6,60)G2
   60 FORMAT(10X,3HG2=,9X,F10.4,9X,F10.4)
      WRITE(6,70)PHID,G1,G2
   70 FORMAT(////2X,4HPHI=,F10.4//10X,3HG1=,9X,F10.4,9X,F10.4//10X,3HG2=
     1    9X,F10.4,9X,F10.4//)
      GO TO 5
    8 STOP
C
      END
```

```
C
C REACTION TANGENTIELLE CAS CRITIQUE 90 DEGRES
C
      REAL K1,K2,K3,U1,U2,U3
    1 READ(6,600)T
  600 FORMAT(F12.6)
C
      C=EXP(-T)
      A=1.-C
      B=A-T
C
      K1=-2./(A*T)
      U1=1.-T*(1.+C**2)/(2.*A)
      WRITE(1,100)T,K1,U1
  100 FORMAT(1HT,F12.6/5HK1=,F12.6,5X,3HU1=,F12.6)
C
    2 READ(6,601)K2,K3,U2,U3
  601 FORMAT(4(F12.6/))
      WRITE(1,101)K2,K3,U2,U3
  101 FORMAT(5X,2HK2,12X,2HK3,13X,2HU2,13X,2HU3,/,4(F12.6,2X))
C
      BET=1./(A-B*K1*U1)
      ALF=(B*K1-1.)*BET
C
      A2=2.*K2*U1
      B2=K1*U2+K2*U1**2
C
      U1=K2+A2*ALF+B2*(ALF**2-BET**2)
      U2=A2*BET+B2*2.*ALF*BET
      C20R=-0.5*(B*U1-(A+B*ALF)*U2/BET)
      C20I=-0.5*(B*U2+(A+B*ALF)*U1/BET)
C
      C22R=-0.5*(B*U1+(A+B*ALF)*U2/BET)
      C22I=-0.5*(-B*U2+(A+B*ALF)*U1/BET)
C
      U1=K2+A2*ALF+B2*(ALF**2+BET**2)
      C21R=-0.5*U1*B
      C21I=-0.5*(A+B*ALF)/BET
C
      A2=3.*K3*U1
      B2=2.*K2*U2+3.*K3*U1**2
      C2=2.*K2*U2*U1+K3*U1**3+K1*U3
C
      U1=K3+A2*ALF+B2*(ALF**2+BET**2/3.)+C2*ALF*(ALF**2+BET**2)
      U2=A2*BET/3.+B2*2.*ALF*BET/3.+C2*BET*(ALF**2+BET**2)
      C31R=-0.5*(B*U1-(A+B*ALF)*U2/BET)
      C31I=-0.5*(B*U2+(A+B*ALF)*U1/BET)
C
      U1=K3+A2*ALF+B2*(ALF**2-BET**2)+C2*ALF*(ALF**2-3.*BET**2)
      U2=-A2*BET-B2*2.*ALF*BET+C2*BET*(BET**2-3.*ALF**2)
      C32R=-0.5*(B*U1-(A+B*ALF)*U2/BET)
      C32I=-0.5*(B*U2+(A+B*ALF)*U1/BET)
C
      C31R=C21R*C20R-C21I*C20I-2.*(C21R*C20I+C21I*C20R)+2.*(C21R**2
     1+C21I**2)-C20R**2+C20I**2+2.*C31R
      C31I=2.*(C21R*C20R-C21I*C20I)+C21R*C20I+C21I*C20R-2.*(C21R**2
     1+C21I**2)-C20R**2+C20I**2+2.*C31I
      C32R=-C22R*(C21R+C21I)+C22I*(C21I-C21R)-C22R*(C20R-C20I)-C22I*
     1(C20I+C20R)+C32R
      C32I=C22R*(C21R-C21I)-C22I*(C21R+C21I)-C22R*(C20R+C20I)-C22I*
     1(C20I-C20R)+C32I
C
      RMG31=SQRT(G31R**2+G31I**2)
      RMG32=SQRT(G32R**2+G32I**2)
C
      CTAU1=G31R/RMG31
      STAU1=-G31I/RMG31
C
      G1=-2.*RMG31*STAU1
      PA=-RMG31*CTAU1/RMG32
      WRITE(1,102)STAU1,CTAU1,RMG31,RMG32,G1,PA
  102 FORMAT(5X,5HSTAU1,9X,5HCTAU1,9X,5HG31/,9X,5HG32/,10X,3HG1,12X,
     12HPA,/,6(F12.6,2X))
```

```
      IF(ABS(G1)-2.*DM*S)22,10,24
   24 WRITE(6,204)
  104 FORMAT(6X,13H..CONTOURS..)
      GO TO 10
C
   22 WRITE(6,122)
  122 FORMAT(6X,20H..NO CONTOURS..)
      GO TO 10
   10 CALL PLOTE(0.,0.)
      GO TO (1,2),J
      END
```

ANNEXE 2

ETUDE DU PASSAGE D'UN MULTIPLICATEUR D'UNE RECURRENCE PAR LA VALEUR ± 1

Soit la récurrence du 2ème ordre à variables réelles :

$$(A\text{-}1)\qquad \begin{cases} x_{n+1} = S_1 x_n + \sum_{i=m}^{\infty} P_i(x_n, y_n) & m \geq 2 \\ y_{n+1} = S_2 y_n + \sum_{i=m'}^{\infty} Q_i(x_n, y_n) & m' \geq 2 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} P_i = \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} C_{ip}\, x^{i-p}\, y^{p} \\ Q_i = \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} D_{ip}\, x^{p}\, y^{i-p} \end{cases}$$

S_1 et S_2 multiplicateurs réels de (A-1)

L'étude de la stabilité du point double $x_n = y_n = 0$ de (A-1) lorsque $S_1 = \pm 1$ a été traitée dans [II-7] , ainsi que le comportement du système au voisinage du point singulier lorsque sous l'effet d'une variation d'un paramètre μ, le multiplicateur $S_1(\mu)$ traverse la valeur ± 1 [II-6] , [II-7] . Ces études ont été menées directement à partir de la formulation (A-1). Nous proposons ici une formulation différente de ces problèmes, basée sur l'utilisation d'une transformation proposée par CIGALA.

TRANSFORMATION DE LA RECURRENCE INITIALE A L'AIDE DES SUBSTITUTION DE CIGALA [II-9].

① Cas où m = m' : à l'aide d'une substitution de la forme

$$(A\text{-}2)\qquad \begin{cases} \xi = x + \varphi_m(x, y) \qquad \eta = y + \psi_m(x, y) \\ \psi_m = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \alpha_p \, \xi^{m-p} \, \eta^p \\ \psi_m = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \beta_p \, \xi^p \, \eta^{m-p} \end{cases}$$

on détermine les α_p et β_p pour annuler le plus grand nombre possible de termes de degré m dans la récurrence transformée. Ceci amène à choisir :

$$(A\text{-}3)\qquad \begin{cases} \alpha_p = C_{mp} (S_1 - S_1^{m-p} S_2^p)^{-1} \\ \beta_p = D_{mp} (S_2 - S_2^{m-p} S_1^p)^{-1} \end{cases}$$

La parité de m et le signe de S_1 jouent un rôle dans cette élimination des termes de degré m :

a) m pair

Si $S_1 = -1$ on peut éliminer tous les termes de degré m et on est ainsi ramené au cas de la récurrence (A-1) avec m impair.

Si $S_1 = +1$ on ne peut pas éliminer les termes de ξ_n^m dans P_m et $\xi_n^{m-1}\eta_n$ dans Q_m :

$$(A\text{-}4)\qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = S_1 \xi_n + C_{m,o} \, \xi_n^m + \ldots \text{ termes de degré } \geqslant m+1 \\ \eta_{n+1} = S_2 \eta_n + m \, D_{m,1} \, \xi_n^{m-1} \, \eta_n + \ldots \text{ termes de degré } \geqslant m+1 \end{cases}$$

b) m impair

Pour $S_1 = \pm 1$ la récurrence transformée est identique à la forme (A-4)

Lorsque le cas m impair est issu de a) (m - 1 pair et $S_1 = -1$) seuls les coefficients C_{mo} et D_{m1} sont modifiés et deviennent

$$\begin{cases} \gamma_{m,o} = f(\gamma_{m-1,o}, \ldots, \gamma_{m-1,p}) \\ \delta_{m,1} = f(\gamma_{m-1,p}, \ldots, \delta_{m-1,p}) \end{cases}$$

En conclusion, dans un voisinage suffisamment proche de l'origine, l'analyse de la stabilité au cas critique peut se faire sur la récurrence transformée de la forme :

$$\text{(A-5)} \qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = S_1 \xi_n + \gamma_{m,o} \xi_n^m + \ldots \text{ termes de degré} \geq m+1 \\ \eta_{n+1} = S_2 \eta_n + m\, \delta_{m,1} \xi_n^{m-1} \eta_n + \ldots \text{ termes de degré} \geq m+1 \end{cases}$$

2 Cas où $m < m'$ la substitution devient

$\xi = x + \varphi_m(x, y) \qquad \eta = y$ et les conclusions sont identiques au cas précédent

3 Cas où $m > m'$: on prend la substitution

ce qui donne $\xi = x + \varphi_m(x, y) \qquad \eta = y + \psi_m(x, y)$

$$\xi_{n+1} = S_1 \xi_n + \gamma_{m,o} \xi_n^m + \ldots \text{ termes de degré} \geq m+1$$

$$\eta_{n+1} = S_2 \eta_n + m'\, \delta_{m',1} \xi_n^{m'-1} \eta_n + \ldots \text{ termes de degré} \geq m'+1$$

Dans ce dernier cas il y a lieu d'envisager les parités respectives de m et m' suivant que $S_1 = +1$ ou -1.

ANALYSE DE LA STABILITE DU CAS CRITIQUE POUR $S_1 = +1$ ou -1

La forme générale de la récurrence que l'on étudie est

$$\text{(A-6)} \qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = S_1 \xi_n + \gamma_{m,o} \xi_n^m + \ldots \text{ termes de degré} \geq m+1 \\ \eta_{n+1} = S_2 \eta_n + m'\, \delta_{m',1} \xi_n^{m'-1} \eta_n + \ldots \text{ termes de degré} \geq m'+1 \end{cases}$$

avec $m \leq m'$

① $S_1 = +1$: à l'aide des fonctions de Liapunov introduites dans [ ], soient

$$V_n = x_n + \beta y_n^2 \quad \text{pour m pair}$$

$$V_n = \frac{1}{2} \xi_n^2 + \beta \eta_n^2 \quad \text{pour m impair}$$

on obtient les conditions de stabilité du cas critique, conditions qui ne dépendent que du coefficient $\gamma_{m,o}$.

② $S_1 = -1$: les substitutions ci-dessus montrent que l'on obtient une forme (A-6) avec m impair et l'utilisation de la fonction $V_n = \frac{1}{2} \xi_n^2 + \beta \eta_n^2$ permet de conclure que le cas critique correspondant est stable si $\gamma_{m\,o}$ est positif.

Remarques : 1 - Dans le cas où après substitution nous avons $m > m'$ il y a lieu de transformer la récurrence (A-6) par le changement de variables :

$$\eta_n = u(\xi_n) + z_n \quad , \quad u(\xi_n) \text{ étant solution de}$$

$$S_2\, \eta_n - \eta_n + m'\, \delta_{m',1}\, \xi_n^{m'-1}\, \eta_n + \ldots = 0$$

2 - La forme (A-6) permet de conclure rapidement lors de l'étude des singularités qui apparaissent au voisinage d'un point double dont l'un des multiplicateurs traverse la valeur + 1 ou - 1.

BIBLIOGRAPHIE

[I-1] W.R. BENNET

Steady state transmission through networks containing periodically operated switches.
I.R.E. Trans. P.G. CT 2, 1, pp. 17-22, March 1955.

[I-2] C.A. DESOER

A network containing a periodically operated switch solved by successive approximations.
The Bell System Technical Journal, 26, n° 4, 1956.

[I-3] G. FARMANFARMA

Analysis of linear sampled data systems with finite pulse width
A.I.E.E. Trans. vol. 75, Part I, 1956.

Analysis of multiple sampler systems with finite pulse width
A.I.E.E. Trans. Vol. 77, Part II, 1958.

General analysis and stability study of finite pulsed feedback systems.
Appl. and Ind., July 1958.

[I-4] R.E. KALMAN - J.E. BERTRAM

A unified approach to the theory of sampling systems.
Journal of Franklin Institute. May 1959.

[I-5] C.Y. LEE

Stability of non linear sampled data systems with finite sampling duration.
Proceedings I.E.E.E. , June 1964.

[I-6] J.T. TOU

Digital and sampled data control systems.
Mc GRAW HILL, 1964.

[II-1] H. POINCARRE

Oeuvres de Henri Poincarré
Tome 1, Gauthier Villars, 1951.

[II-2] S. LATTES

Annali di Matematica
Série 3, Tome 13, 1906.

[II-3] T. LEVI CIVITA

Annali di Matematica
Série 3, Tome 5, 1901.

[II-4] P. VIDAL

Non linear sampled data systems.
Gordon and Breach (Distribué par Dunod) 1969.

[II-5] N. BAUTIN

Comportement des systèmes dynamiques au voisinage des limites du domaine de stabilité
Gostekhizdat, Moscou 1949.

[II-6] C. MIRA - F. ROUBELLAT

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, Série A, 1968.

[II-7] F. ROUBELLAT

Thèse n° 364, Toulouse 1969.

[II-8] J.P. BABARY - C. MIRA

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, Série A, 1968, pp. 129-132.

[II-9] A.R. CIGALA

Annali di Matematica
Série 3, Tome 11, 1905.

[II-10] L.O. BARSUK - N.M. BELOSLUDSTEV - Yu. I. NEIMARK - N.M. SALGANSKAYA

Isv. Vyschnik Utchebnyk Zavedenii Radiofisika
URSS 11, n° 11, 1968.

[II-11] J.P. BABARY

Thèse n° 365, Toulouse 1969

[II-12] G.D. BIRKHOFF

Acta Matematica
Vol. 43, 1920.

[II-13] S. LATTES
Bull. Soc. Math. Fr. , t. 39, 1907, pp. 309-345.

[II-14] Yu. NEIMARK
Izvestia Vuzov Radiofisika SSSR, t. 1, n° 1, 1958.

[II-15] C. MIRA
C.R.Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 621.

[II-16] J.P. BABARY - C. MIRA
C.R.Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 129, 1969.

[II-17] W. HAHN
Theory and applications of Liapunov's direct method.
Prentice Hall, 1963.

[II-18] P. FISCHER
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p . 235, 1970.

[II-19] C. MIRA
C.R.Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 1006, 1969.

[II-20] C. MIRA
C.R.Acad. Sc Paris, t.270, p. 332, 1970

[II-21] C. MIRA
C.R.Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 466, 1970.

[III-1] Ja . Z. TSYPKIN
Institut de Mathematiques.
Acad. Sc. Ukraine. Kiev, 1961

[III-2] W.E. MESERVE - H.C. TORNG
I.R.E. Trans. AC Sept. 1960, p. 298.

[III-3] W.E. MESERVE - H.C. TORNG
Trans. A.S.M.E. Bc Engng March 1961, p. 77.

[III-4] B. KONDO - S. IWAI
Proc. 2nd IFAC Congres, Basle 1963, Butterworths. London

[III-5] M.A. PAI
Trans. I.E.E.E. Appl. and Industry, Janv. 1963, p. 350.

[III-6] R.N. DENISOV
Avtomatika i Telemekhanika, Juin 1968, p. 88.

[III-7] P.L. GUICHET
Automatisme, Juin 1963.

[III-8] A.I. BARKIN
Avtomatika i Telemekhanika, Janvier 1968, p. 86.

[III-9] M.V. STARIKOVA
Avtomatika i Telemekhanika, Avril 1968, p. 49.

[III 10] A. HALANAY
C.R. Acad. Sc. Roumaines, Juin 1962.

[III-11] A. GIRAUD
Thèse N° 205, Toulouse 1969.

[III-12] G. SENOUILLET - P.L. GUICHET
L'Onde Electrique, Juillet 1961.

[III-13] Ja. Z. TSYPKIN
Automatic and Remote Control.
Academic Press, New York, n° 6, June 1961, p. 614.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : Analyse des systèmes linéaires échantillonnés à durée d'échantillonnage non nulle 7

I-1 - Introduction 9
I-2 - Rappels sur les méthodes d'analyse des systèmes à durée d'échantillonnage non nulle 10
I-2-1 - Méthodes approchées 10
I-2-2 - Méthodes exactes 12
I-3 - Analyse, à l'aide des récurrences associees, d'un système échantillonné à durée d'échantillonnage non nulle 14
I-3-1 - Le système commandé est un intégrateur de gain K 17
I-3-1-1 - Système sans filtre 18
I-3-1-2 - Système avec bloqueur d'ordre zéro 18
I-3-2 - Le système commandé est constitué par un intégrateur de gain K et une constante de temps τ 19
I-3-2-1 - Système sans filtre 20
I-3-2-2 - Système avec bloqueur d'ordre zéro 22
I-3-3 - Conséquences de la forme particulière des domaines de stabilité sur la précision et le régime transitoire du système 24
I-3-4 - Système avec correction tachymétrique 27
I-3-5 - Méthode d'analyse approchée 27
I-4 - Conclusions de l'étude 31
I-4-1 - Propriétés mises en évidence 31
I-4-2 - Méthode d'analyse 31

CHAPITRE II : Sur les cas critiques complexes et les cas d'exception dans un système échantillonné non linéaire du 2ème ordre 33

II-1 - Introduction 35
II-2 - Etude des cas critiques complexes et des cas d'exception pour un système échantillonné non linéaire du 2ème ordre 39
II-2-1 - Cas critiques complexes 40
II-2-1-1 - Rappel des résultats de CIGALA 41
II-2-1-2 - Extension des résultats de CIGALA 43
II-2-2 - Analyse des cas d'exception 48
II-2-2-1 - Cas d'exception à $\varphi = 2\pi/3$ 54
II-2-2-2 - Cas d'exception à $\varphi = 2\pi/4$ 65
II-3 - Conclusion 71

CHAPITRE III - Sur les oscillations dans un système échantillonné non linéaire 73

III-1 - Introduction 75
III-2 - Rappel sur les bifurcations 76
III-3 - Etude des oscillations dans un système échantillonné non linéaire 77
III-3-1 - Présentation du système étudié 77
III-3-2 - Etude des points doubles 78
III-3-3 - Etude des cycles - Générations d'oscillations de basse fréquence 81
III-3-3-1 - Cycles d'ordre 2 81
III-3-3-2 - Recherche des cycles d'ordre supérieur à 2 et génération de cycles d'ordre élevé 84
III-4 - Conclusions 87

CONCLUSION 89

ANNEXE 1 - Détermination des coefficients C_{ip}, calcul de G_2 et analyse de certains cas d'exception 95

ANNEXE 2 - Etude du passage d'un multiplicateur d'une récurrence par la valeur ± 1 107

BIBLIOGRAPHIE 113

Autorisation de soutenance
accordée.
TOULOUSE, le 30 AVR. 1970

Le Président du Conseil Transitoire,

F. MATHIS